9.5.7. Iteration weiterer quadratischer Funktionen

Bei Iterationen an der Parabel $f_4(x) = 4x(1 - x)$ bleibt die Iterationslinie bei Startwerten $0 \leq x_0 \leq 1$ immer im Intervall [0; 1]. Alle interessanten Verhaltensweisen (Konvergenz, Periodizität und Chaos) finden nur in diesem **invarianten Intervall** statt. Bei Startpunkten im **Freiheitsbereich** außerhalb dieses Intervalls streben die Iterationslinien nach beiden Seiten ins Unendliche.

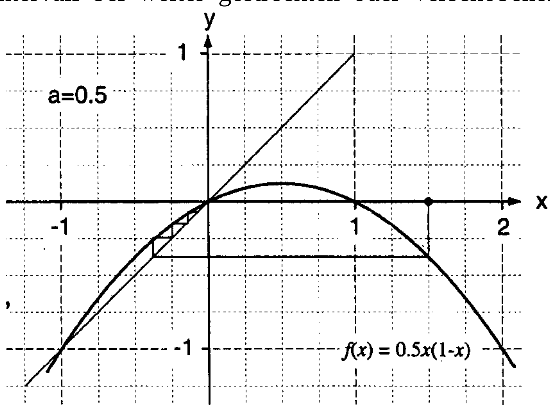
Im Folgenden wird untersucht, wie sich das invariante Intervall bei weiter gestreckten oder verschobenen Parabeln verändert.

a) Betrachte das Verhalten der Iterationslinien an $f_{0,5}(x) = 0{,}5x(1 - x)$ für Startwerte in den Bereichen

$-1 < x_0 < 0$
$0 < x_0 < 1$ und
$1 < x_0 < 2$.

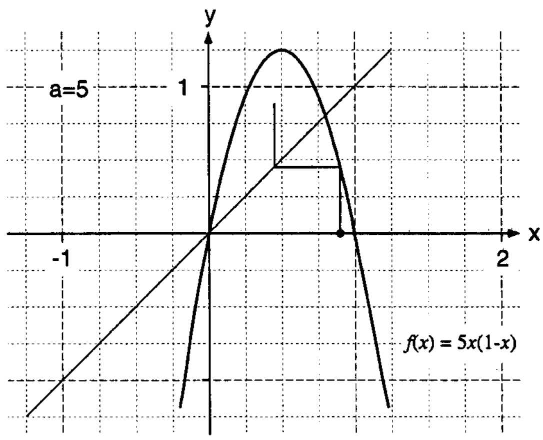
Was passiert bei den Startwerten $x_0 = -1$; 0 oder 1?

Wie groß ist das invariante Intervall?



b) Betrachte die gezeichnete Iterationslinie an $f_5(x) = 5x(1 - x)$ und beschreibe ihr Verhalten.

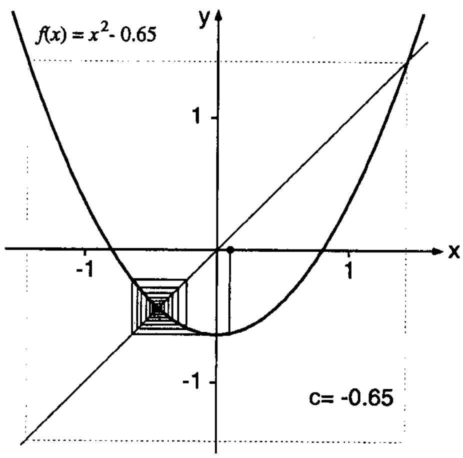
Welche Startwerte x_0 führen **nicht** zur Flucht in Unendliche?



c) Beschreibe das Verhalten der Iterationslinie an $f(x) = x^2 - 0{,}65$ mit Startwert $x_0 = 0{,}1$.

Welche anderen Startwerte führen zum gleichen Attraktor?

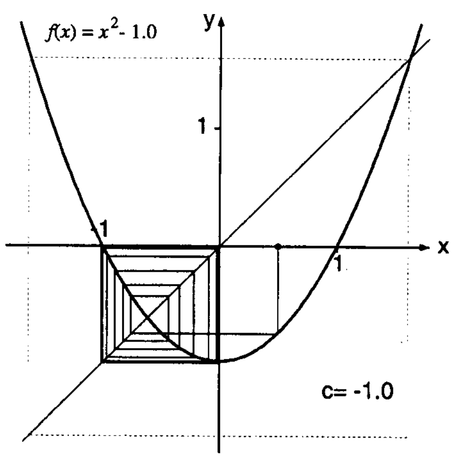
Wie groß ist das invariante Intervall?



d) Beschreibe das Verhalten der Iterationslinie an $f(x) = x^2 - 1{,}0$ mit Startwert $x_0 = 0{,}5$.

Welche anderen Startwerte führen zur gleichen Periode?

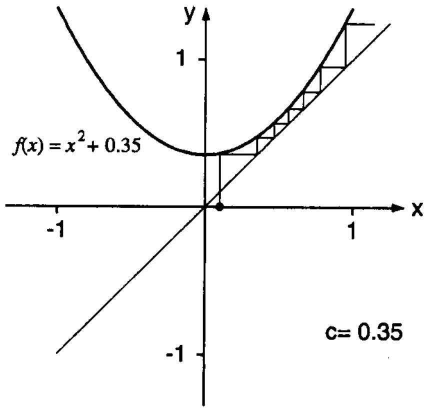
Wie groß ist das invariante Intervall?



e) Beschreibe das Verhalten der Iterationslinie an $f(x) = x^2 + 0{,}35$ mit Startwert $x_0 = 0{,}1$.

Gibt es Attraktoren oder Repeller?

Wie wird sich ein Fehlerintervall auf dieser Iterationslinie verhalten? Wird es komprimieren, expandieren oder keins von beiden?



f) Für die folgenden Untersuchungen wird das Programm aus 9.5.4. leicht modifiziert: Die iterierte Funktion ist jetzt $f_c(x) = x^2 + c$. Entsprechend gibt man nun anstelle des Streckfaktors a den y-Achsenabschnitt c ein. Wegen der damit verbundenen Verschiebung gibt man nun zusätzlich auch den Fensterbereich R ein. Dafür wird die unsichtbare Iteration mit k Schritten zu Beginn weggelassen:

```
prgm Iter
:ClrDraw             Bildschirm löschen
:Fix 3               Rechnungen auf 3 Nachkommastellen beschränken
:Prompt C,I,R        y-Achsenabschnitt C, Startwert I und Fensterbereich R abfragen
:R → Xmin            Fenstergröße festlegen
:R → Xmax
:R → Ymin
:R → Ymax
:DrawF X^2+C         Parabel zeichnen
:DrawF X             1. Winkelhalbierende zeichnen
:For(N,0,20,1)       20 Iterationswerte mit Zeichnung berechnen
:Line(I,0,I,I)
:I^2 + C → J
:Line(I,I,I,J)
:Line(I,J,J,J)
:Pause               Drücke Enter, um fortzufahren
:Disp J
:Pause               Drücke Enter, um fortzufahren
:J → I
:End
```

g) Beschreibe das Verhalten der Iterationslinien mit den folgenden Startwerten x_0 und Y-Achsenabschnitten c:

c	x_0	Beschreibung
0,40	0,2	
0,35	0,2	
0,30	0,2	
0,25	0,2	
−0,60	0,3	
−0,70	0,3	
−0,80	0,3	
−0,90	0,3	
−1.99	0,3	
−2,01	0,3	