

9.5.7. Iteration weiterer quadratischer Funktionen

Bei Iterationen an der Parabel $f_4(x) = 4x(1 - x)$ bleibt die Iterationslinie bei Startwerten $0 \leq x_0 \leq 1$ immer im Intervall $[0; 1]$. Alle interessanten Verhaltensweisen (Konvergenz, Periodizität und Chaos) finden nur in diesem **invarianten Intervall** statt. Bei Startpunkten im **Freiheitsbereich** außerhalb dieses Intervalls streben die Iterationslinien nach beiden Seiten ins Unendliche.

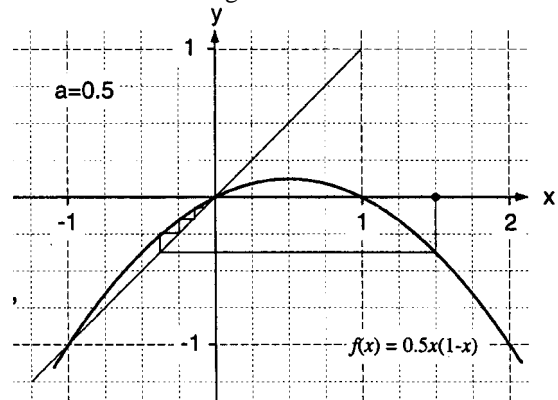
Im Folgenden wird untersucht, wie sich das invariante Intervall bei weiter gestreckten oder verschobenen Parabeln verändert.

- a) Betrachte das Verhalten der Iterationslinien an $f_{0,5}(x) = 0,5x(1 - x)$ für Startwerte in den Bereichen

$$\begin{aligned} -1 < x_0 < 0 \\ 0 < x_0 < 1 \text{ und} \\ 1 < x_0 < 2. \end{aligned}$$

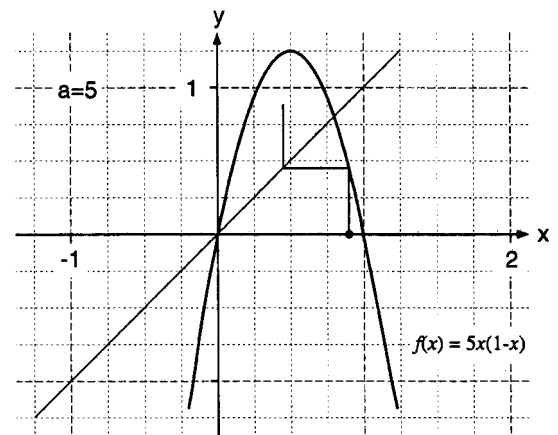
Was passiert bei den Startwerten $x_0 = -1; 0$ oder 1 ?

Wie groß ist das invariante Intervall?



- b) Betrachte die gezeichnete Iterationslinie an $f_5(x) = 5x(1 - x)$ und beschreibe ihr Verhalten.

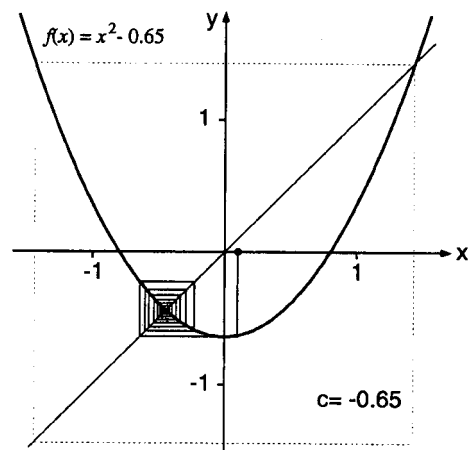
Welche Startwerte x_0 führen **nicht** zur Flucht in Unendliche?



- c) Beschreibe das Verhalten der Iterationslinie an $f(x) = x^2 - 0,65$ mit Startwert $x_0 = 0,1$.

Welche anderen Startwerte führen zum gleichen Attraktor?

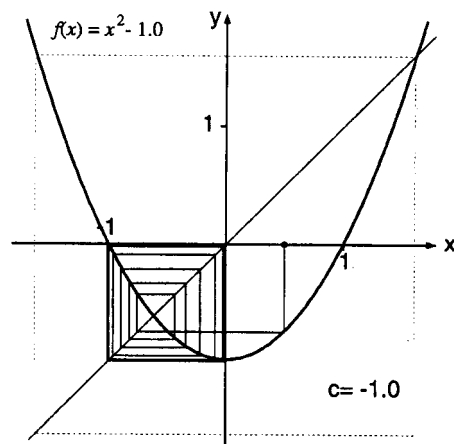
Wie groß ist das invariante Intervall?



- d) Beschreibe das Verhalten der Iterationslinie an $f(x) = x^2 - 1,0$ mit Startwert $x_0 = 0,5$.

Welche anderen Startwerte führen zur gleichen Periode?

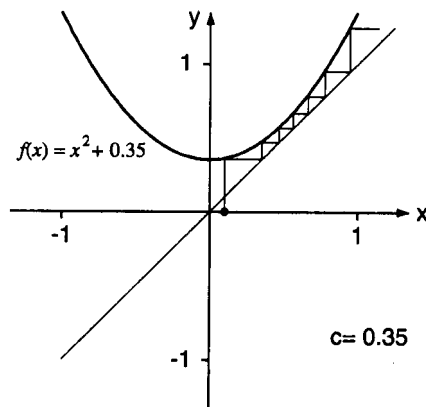
Wie groß ist das invariante Intervall?



- e) Beschreibe das Verhalten der Iterationslinie an $f(x) = x^2 + 0,35$ mit Startwert $x_0 = 0,1$.

Gibt es Attraktoren oder Repeller?

Wie wird sich ein Fehlerintervall auf dieser Iterationslinie verhalten? Wird es komprimieren, expandieren oder keins von beiden?



- f) Für die folgenden Untersuchungen wird das Programm aus 9.5.4. leicht modifiziert: Die iterierte Funktion ist jetzt $f_c(x) = x^2 + c$. Entsprechend gibt man nun anstelle des Streckfaktors a den y -Achsenabschnitt c ein. Wegen der damit verbundenen Verschiebung gibt man nun zusätzlich auch den Fensterbereich R ein. Dafür wird die unsichtbare Iteration mit k Schritten zu Beginn weggelassen:

```

prgm Iter
1 :ClrDraw           Bildschirm löschen
2 :Fix 3             Rechnungen auf 3 Nachkommastellen beschränken
3 :Prompt C,I,R     y-Achsenabschnitt C, Startwert I und Fensterbereich R abfragen
4 :R → Xmin        Fenstergröße festlegen
5 :R → Xmax
6 :R → Ymin
7 :R → Ymax
8 :DrawF X^2+C     Parabel zeichnen
9 :DrawF X         1. Winkelhalbierende zeichnen
10 :For(N,0,20,1)  20 Iterationswerte mit Zeichnung berechnen
11 :Line(I,0,I,I)
12 :I^2 + C → J
13 :Line(I,I,I,J)
14 :Line(I,J,J,J)
15 :Pause          Drücke Enter, um fortzufahren
16 :Disp J
17 :Pause          Drücke Enter, um fortzufahren
18 :J → I
19 :End

```

- g) Beschreibe das Verhalten der Iterationslinien mit den folgenden Startwerten x_0 und Y -Achsenabschnitten c :

c	x_0	Beschreibung
0,40	0,2	
0,35	0,2	
0,30	0,2	
0,25	0,2	
-0,60	0,3	
-0,70	0,3	
-0,80	0,3	
-0,90	0,3	
-1,99	0,3	
-2,01	0,3	