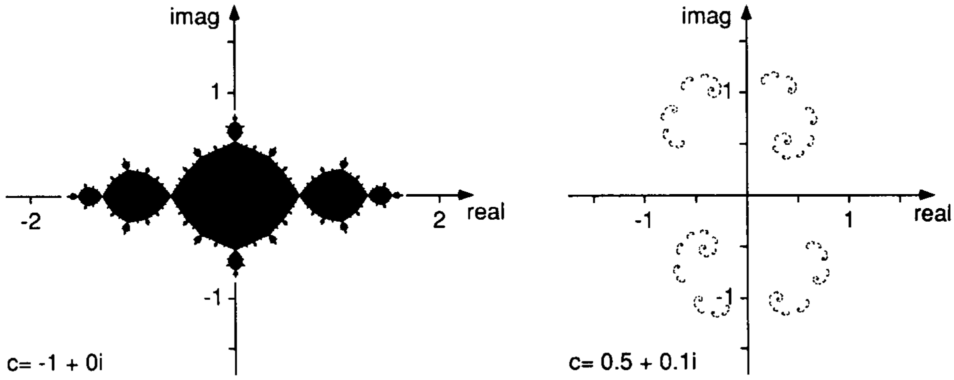
6.9.10. Julia-Mengen

Die invariante Menge einer reellen quadratischen Funktion $f_c(x) = x^2 + c$ ist entweder ein zusammenhängendes Intervall oder ein total unzusammenhängedes Diskontinuum. Entsprechend ist die invariante Menge eiern komplexwertigen quadratischen Funktion entweder ein zusammenhängendes Gebiet (Beispiel links) oder eine total unzusammenhängende staubartig verteilte Punktemenge (Beispiel rechts):



Wie im reellen Fall (Abschnitt 9.6.5.) kann man sich auch im komplexen Bereich auf die Untersuchung des Startwertes $z_0 = 0$ beschränken, weil dort das Minimum (der „Scheitelpunkt“) der komplexen Parabel liegt. Strebt die zugehörige Iterationsfolge gegen Unendlich, so hat die invariante Menge an der Stelle $z_0 = 0$ ein „Loch“ und hat daher die Gestalt eines Diskontinuums. Bleibt die Iterationsfolge dagegen in einem bestimmten Bereich (nämlich innerhalb der invarianten Menge, deren Ausdehnung aber nicht bekannt ist), so gehört die Stelle $z_0 = 0$ und damit auch ihre Umgebung zur invarianten Menge, welche daher zusammenhängend sein muss. (Wie man sich vorstellen kann, sind die Beweise all dieser Behauptungen allerdings nicht ganz trivial und werden hier übergangen!)

a) Untersuche die folgenden Funktionen mit Hilfe des Programms aus Abschnitt 9.6.9. mit dem Startwert $z_0 = 0$ im Hinblick auf ihre invarianten Menge. Ist sie zusammenhängend oder unzusammenhängend?

$f_c(z) =$	Invariante Menge zusammenhängend?
$z^2 + i$	
$z^2 + 0{,}5 + 0{,}1i$	
$z^2 - 1$	
$z^2 - 1 - i$	

Invariante Mengen komplexer Funktionen wurden zuerst von dem französischem Mathematiker **Gaston Julia** (1893 – 1978) untersucht. Er wurde als Soldat im 1. Weltkrieg schwer verwundet und verlor dabei seine Nase. Zwischen mehreren äußerst schmerzhaften Operationen setzte er im Krankenhaus seine mathematischen Untersuchungen fort und veröffentlichte 1918 mit 25 Jahren einen Artikel über die nach ihm benannten Mengen, die ihn schlagartig berühmt machte und ihn später zu einer Professur an der École Polytechnique in Paris verhalf. Die Begeisterung für seine ästhetischen Mengen in den zwanziger Jahren wurde auch nicht dadurch gebremst, dass alle Iterationen mühsam von Hand ausgeführt werden mussten. Nach dem 2. Weltkrieg waren seine Arbeiten dann vergessen, bis sie durch Benoit Mandelbrot 1977 und mit Hilfe der Computertechnik wieder aktuell wurden.

Heute wird der **Rand** einer invarianten Menge als Julia-Menge bezeichnet. Ist die invariante Menge zusammenhängend, so besteht die Julia-Menge aus einer durchgehenden (Rand-)linie. Ist die invariante Menge dagegen eine total unzusammenhängende Menge aus staubartig verteilten Punkten, so besteht sie nur aus Rand und ist mit ihrer Julia-Menge identisch.

b) Beschreibe die Julia-Menge der Funktion $f_0(z) = z^2$. Betrachte zunächst das Verhalten der Iterationsfolge mit Startwert $z_0 = 0$ und entscheide, ob die invariante Menge zusammenhängend ist oder nicht. Wähle dann beliebige Startwerte z_0 mit

$|z_0| < 1$

$|z_0| = 1$

$|z_0| > 1$

und untersuche das Verhalten der Iterationsfolgen. Beschreibe zunächst die invariante Menge und dann die entsprechende Julia-Menge.

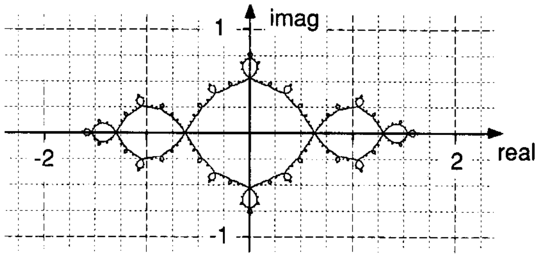
c) Entscheide mit Hilfe des GTR, ob die folgenden Punkte in der invarianten Menge von $f_{-1}(z) = z^2 - 1$ liegen, deren Julia-Menge rechts abgebildet ist.

$z_0 = -1{,}1 + 0{,}3i$

$z_0 = -1{,}2 + 0{,}3i$

$z_0 = 0{,}7i$

$z_0 = 0{,}8i$



d) Eine Zahl z heißt **Fixpunktder** Funktion f, wenn sie durch die Funktion auf sich selber abgebildet wird: $f(z) = z$. Fixpunkte liegen trivialerweise in der invarianten Menge. Bestimme die Fixpunkte von $f_{-1}(z) = z^2 - 1$.