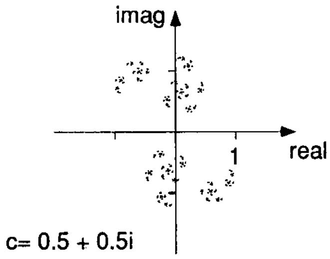
9.6.11. Die Mandelbrot-Menge

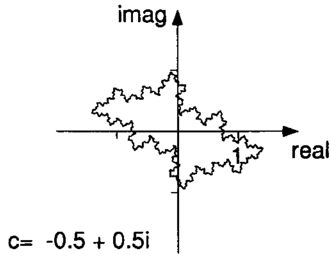
Die **Mandelbrot-Menge** besteht aus allen Parametern $c \in \mathbb{C}$, deren zugehörige Funktionen $f_c(z) = z^2 + c$ eine zusammenhängende invariante Menge besitzen. Um herauszufinden, ob die Zahl c zur Mandelbrot-Menge gehört, genügt es, das Verhalten der Iterationsfolge ausgehend vom kritischen Punkt (= Minimum) $z_0 = 0$ zu untersuchen.

a) Vervollständige die folgenden Tabelle:

Iterationsfolge mit Startwert $z_0 = 0$	invariante Menge ist	Julia-Menge ist	c gehört zur Mandelbrot-Menge
konvergiert			
divergiert			

b) Handelt es sich bei den unten abgebildeten Mengen um invariante Mengen oder um Julia-Mengen? Gehören die entsprechenden Parameter c zur Mandelbrot-Menge ?





Das folgende Programm iteriert die Funktion $f_c(z) = z^2 + c$ mit Startwert $z_0 = o$. Wenn innerhalb von 20 Schritten der Abstand $|z| = 100$ vom Ursprung erreicht wird, zeigt das Programm die für dieses Entfernung benötigte Schrittzahl N an und gibt damit einen Hinweis auf die **Fluchtgeschwindigkeit**. Bleibt z auch nach 20 Schritten näher als 100 Einheiten am Ursprung, so erscheint das Wort „invariant“. Vor Beginn muss der GTR wieder auf MODE/a + bi geschaltet werden!

```
prgm Julia
: ClrHome
: Prompt C
: 0 → Z
: For(N,0,20,1)
: Z² + C → Z
: If abs(C) < 100
: Goto 1
: End
: Disp “INVARIANT”
: Lbl 1
: Disp “N=”,N
```

c) Untersuche die folgenden Parameter c mit Hilfe des Programms auf den Charakter ihrer invarianten Menge. Trage in der rechten Spalte M ein, wenn c zur Mandelbrot-Menge gehört (Anzeige „INVARIANT“) und ansonsten die angezeigt Schrittzahl N:

Parameter c	
0,2 + 0,2i	
−0,3 + 0,2i	
−0,6 + 0,4i	
−1,3 + 0,1i	
−1,7 + 0,1i	

Parameter c	
−0,2 − 0,2i	
−0,3 −0,2i	
−0,6 − 0,4i	
−1,3 − 0,1i	
−1,7 − 0,1i	

d) Jede Parameter c aus Frage c) liegt in einem der Kästchen im linken Koordinatensystem. Färbe die Kästchen nach dem folgenden Schema:
Schwarz für M
Gelb für $1 \le N \le 4$
Orange für $5 \le N \le 8$

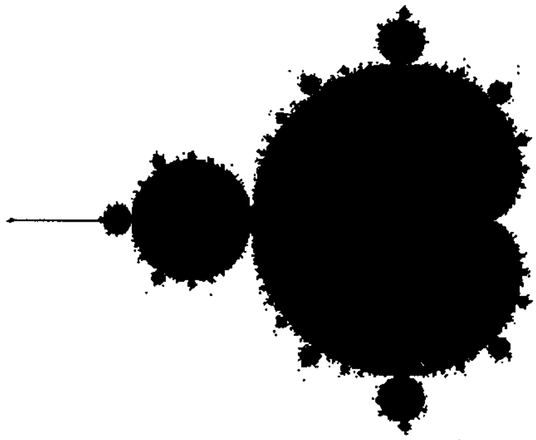
Rot für $9 \le N \le 12$
Grün für $13 \le N \le 16$
Blau für $17 \le N \le 20$

e) Untersuche jeweils den Mittelpunkt der noch nicht ausgefüllten Kästchen mit dem GTR auf Zugehörigkeit zur Mandelbrot-Menge und färbe auch diese Kästchen entsprechend.

f) Vergrößere nun die Auflösung und gehe zu den kleineren Kästchen rechts über. Untersuche wieder jeweils die Mittelpunkte mit dem GTR und färbe diese Kästchen entsprechend.

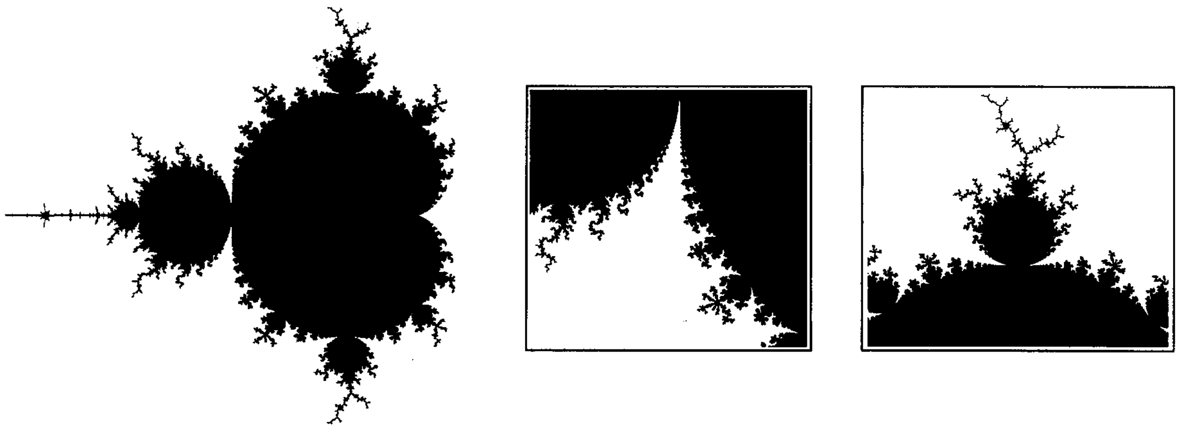
g) Das folgenden Programm zeichnet einen beliebigen Ausschnitt der Mandelbrot-Menge in der Auflösung 64×96 Pixel. Wähle beim ersten Durchlauf Q = 0 für das vollständige Bild und N = 15 für die Zahl der Iterationsschritte. Der GTR benötigt für den Aufbau des gesamten Bildes ca. 25 Minuten (!). Wähle nun einen Vergößerungsbereich über das Menü ZOOM/1:Box. Benutze die Cursortasten, um die linke obere und die rechte untere Ecke des Vergrößerungsbereiches festzulegen. Bestätige die angezeigten Koordinaten jeweils mit ENTER. Lösche dann das Vollbild mit CLEAR. Starte das Programm ein zweites Mal diesmal mit Q = 1 und wieder mit N = 15. Die gewählten Koordinaten des Vergrößerungsbereiches werden nun übernommen und der entsprechende Ausschnitt gezeichnet. Um Rechenzeit zu sparen, wird nur die obere Hälfte der Mandelbrot-Menge berechnet und dann an der reellen Achse gespiegelt. Da die Ausschnitte in der Regel nicht mehr symmetrisch zur reellen Achse sind, müssen sie vollständig berechnet werden, wodurch sich die Rechenzeit verdoppelt(!)

```
prgm Mandelbrot
: All-off
: Clr-Draw
: Prompt Q, N
: 63 → Y
: If Q = 0
:       −2,6 → Xmin
:       1,2 → Xmax
:       0,5 → Xscl
:       −1,2 → Ymin
:       1,2 → Ymax
:       0,5 → Yscl
:       31 → Y
: End
: DispGraph
: (Xmax−Xmin)/95 → C
: (Ymax − Ymin)63 → D
: For(J,0,Y,1)
:       Ymin + JD → B
:       For(I,0,95,1)
:             Xmin + IC → A
:             0 → Z
:             0 → K
:             While k ≤ N and abs(Z) < 10
:                 Z² + A + Bi → Z
:                 k + 1 → K
:             End
:             If abs(Z) < 10
:             Then
:                 Pnt-On (A,B)
:                 If Q = 0
:                 Pnt-On (A,−B)
:             End
:       End
: End
```



h) Vervollständige: Jeder Punkt innerhalb der Mandelbrot-Menge gibt einen Parameter c an, für den die Iteration an $f_c(z)$ = _________ vom Startwert __ aus zu einer _______________ Folge führt. Die ______________ Mengen dieser Funktionen und ihre Ränder (die _______-Mengen) sind zusammenhängend. Außerhalb der Mandelbrot-Menge liegen Parameter für Funktionen mit total ______________________ Mengen. Bei diesen Funktionen führt die Iteration vom __________ Punkt (___________ der Parabel) aus zu einer Flucht ins Unendliche.

i) Es ist bekannt, dass die Mandelbrot-Menge selber ebenfalls **zusammenhängend** ist, obwohl das durch das oben beschriebene Näherungsverfahren gewonnen Bild deutlich einzelne kleine Inseln zeigt. Ein sehr viel komplizierterer Algorithmus erzeugt das Bild unten, an dem man sehen kann, dass die Inseln in Wirklichkeit alle mit der Hauptmenge verbunden sind. Die Ausschnitte der Grenzregion zeigen außerdem ein gewisses Maß an **Selbstähnlichkeit.**



j) Die Abbildung rechts zeigt die Gestalt der invarianten Mengen bzw. ihrer Ränder (Julia-Mengen) für c = −2,1; c = −1,8; c = 0,25 und c = 0,5. Zusammenhängende Mengen existieren wie im reellen Fall nur für −2 ≤ c ≤ 0,25.

$$f(z) = z^2 + c, c = a + bi$$