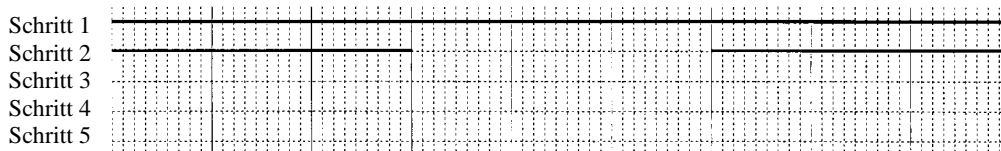


### 9.6.3. Das Cantorsche Diskontinuum

Viele Erkenntnisse und Beispiele zu Fraktalen und Chaos leiten sich aus den Arbeiten von Georg Cantor (1845 – 1918) zur Mengenlehre ab. Das Cantorsche Diskontinuum diente ursprünglich als Beispiel für eine Menge **nicht zusammenhängender** Punkte, die einerseits **beschränkt** ist, andererseits genauso viele Punkte enthält wie die **gesamte Menge der reellen Zahlen**. Erst später wurden diese sich scheinbar widersprechenden Eigenschaften mit der strengen **Selbstähnlichkeit** dieser Menge begründet und andere Mengen mit ähnlichen Eigenschaften (siehe Abschnitt 9.1.) entdeckt.

- a) Das Cantorsche Diskontinuum entsteht durch fortlaufendes Entfernen des mittleren Drittels einer beliebigen Strecke und aller dabei entstehenden Teilstrecken. Zeichne die ersten 4 Konstruktionsschritte und vervollständige die Tabelle:



Schritt	0	1	2	3	4	5	n	→	∞
Zahl der übrigen Intervalle z(n)	1	2							
Gesamtlänge der Intervalle l(n)	1	2/3							

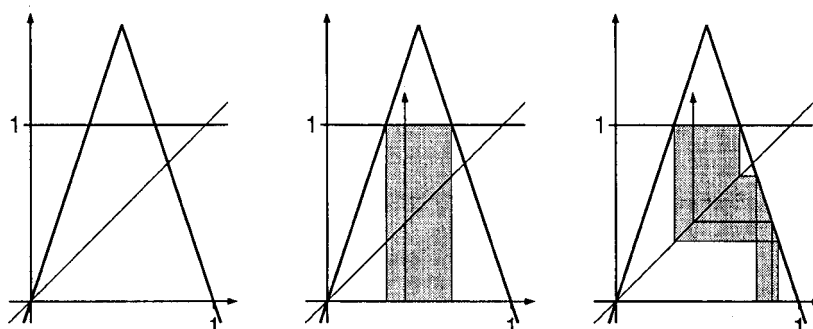
- b) Das Cantorsche Diskontinuum kann auch durch graphische Iteration an einer **Sägezahnfunktion** erzeugt werden, die im mittleren Drittel des Intervalls [0; 1] oberhalb der Linie y = 1 liegt. Beschreibe diese

Funktion mit Hilfe der Abbildung unten in der Form  $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{für } x < x_0 \\ cx + d & \text{für } x \geq x_0 \end{cases}$ :

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$

- c) Die Funktion lässt sich auch als verschobene und gestreckte **Betragsfunktion** in der Form  $f(x) = a|x - x_0| + y_0$  beschreiben. Bestimme zunächst den „**Scheitelpunkt**“  $S(x_0|y_0)$  der Betragsfunktion und lege damit die Verschiebungsparameter  $x_0$  und  $y_0$  fest. Bestimme dann die **Steigung** a der Betragsfunktion und beachte, dass sie **nach unten** geöffnet ist. Formuliere nun ihre Gleichung in einer Zeile:

$$f(x) =$$



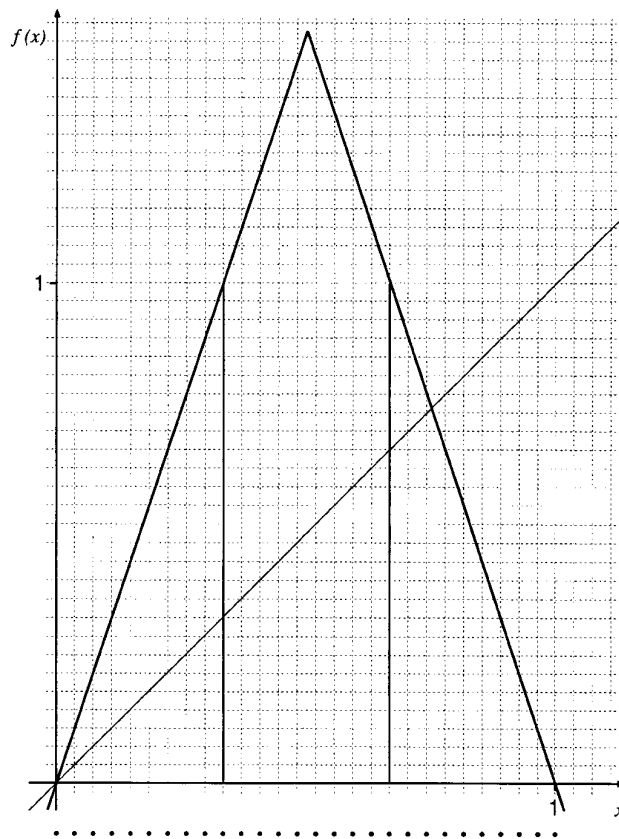
- d) Im 1. Schritt verlassen alle Punkte zwischen  $\frac{1}{3}$  und  $\frac{2}{3}$  das Startintervall [0; 1] und streben gegen Unendlich. Außerdem geraten alle Punkte zwischen  $\frac{7}{9}$  und  $\frac{8}{9}$  in das Intervall  $[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$  und verlassen im 2. Schritt ebenfalls das Startintervall [0, 1]. Welches andere Intervall wird im 2. Schritt ebenfalls entfernt?

e) Markiere auf der punktierten Linie unter dem Graphen die Intervalle, die nach dem 3. Konstruktionsschritt übrig bleiben. (Siehe Frage a))

f) Schraffiere im Stil von Frage b) die Fluchtwege der beiden Intervalle  $[\frac{1}{27}; \frac{2}{27}]$  und  $[\frac{19}{27}; \frac{20}{27}]$  über 3 Iterationsschritte

g) Das Intervall  $[\frac{7}{27}; \frac{8}{27}]$  hat den Fluchtweg  $[\frac{7}{27}; \frac{8}{27}] \rightarrow [\frac{7}{9}; \frac{8}{9}] \rightarrow [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}] \rightarrow \dots \rightarrow \infty$ .

Beschreibe entsprechend den Fluchtweg des Intervalls  $[\frac{25}{27}; \frac{26}{27}]$ .



h) Vervollständige die Tabelle:

Schritt	0	1	2	3	4	5	n	→	∞
Zahl der entfernten Intervalle e(n)	0	1	3						