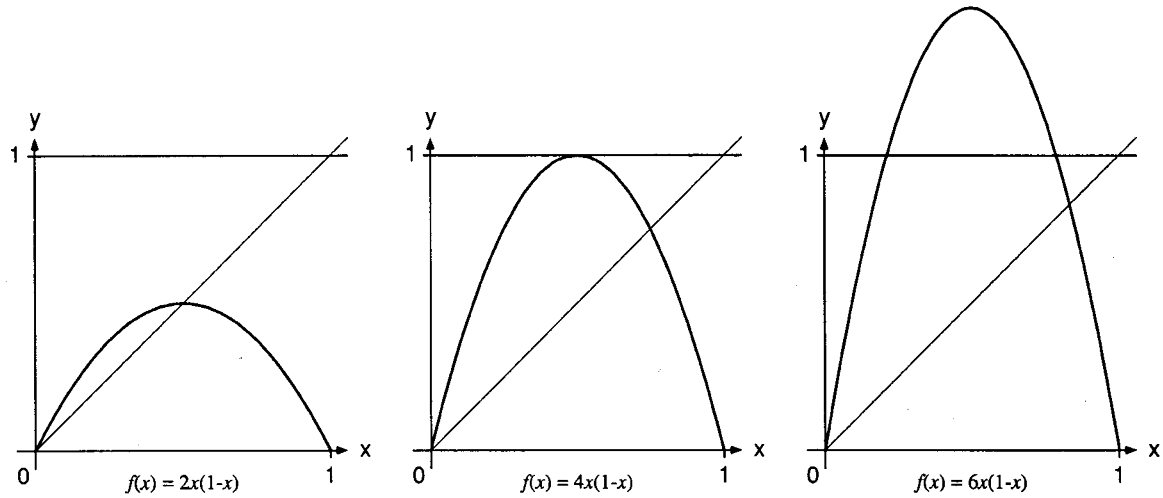
9.6.4. Invariante Mengen von $f_a(x) = ax(1 - x)$

Abhängig vom Streckfaktor a können Iterationen der Funktionen $f_a(x) = ax(1 - x)$ **invariante Mengen** erzeugen, die **zusammenhängend** oder **total unzusammenhängend** sind. Zusammenhängende (Zahlen-)Mengen sind **Intervalle**. Total unzusammenhängende (Zahlen-)Mengen haben die Gestalt des **Cantorschen Diskontinuums**, d.h. zwischen zwei beliebigen Punkten einer solchen Menge findet sich immer ein Punkt, der nicht zu der Menge gehört.

a) Bestimme für die folgenden drei Funktionen die Menge der $x_0 \in [0; 1]$, die nicht zur invarianten Menge gehören, d.h. für die $f(x_0) \notin [0, 1]$ ist.



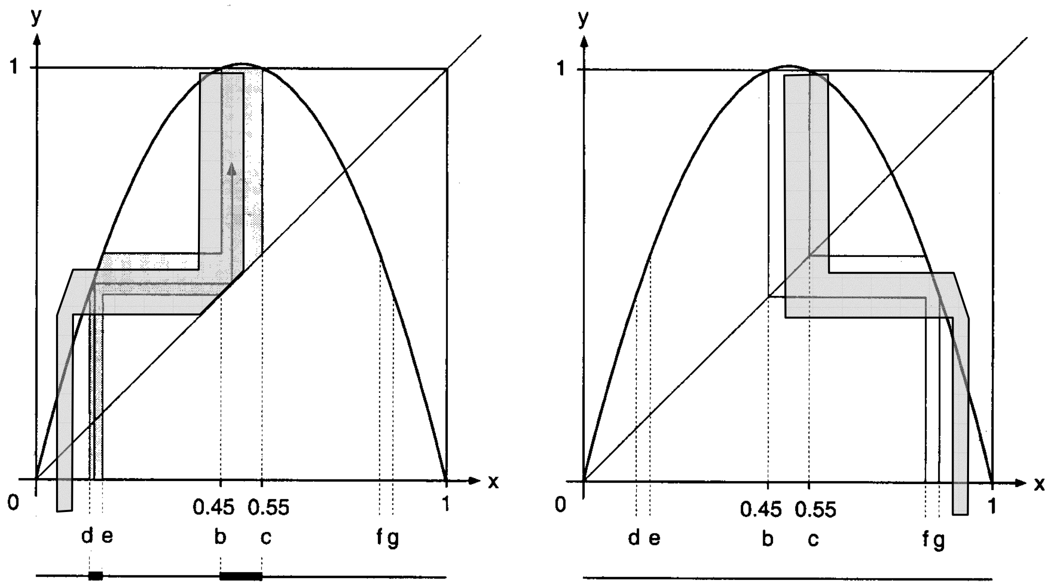
b) Vervollständige die Tabelle für die ersten drei Iterationsschritte mit Startwerten außerhalb des Intervalls [0; 1].

	x_0	$x_1 = f(x_0)$	$x_2 = f(x_1)$	$x_3 = f(x_2)$
$f_2(x) = 2x(1 - x)$	−0,5	−1,50	−7,5	−127,5
	1,5			
$f_4(x) = 4x(1 - x)$	−0,5			
	1,5	−3,00	−48,0	
$f_6(x) = 6x(1 - x)$	−0,5			
	1,5	−4,50	−148,5	
	0,9	0,54		

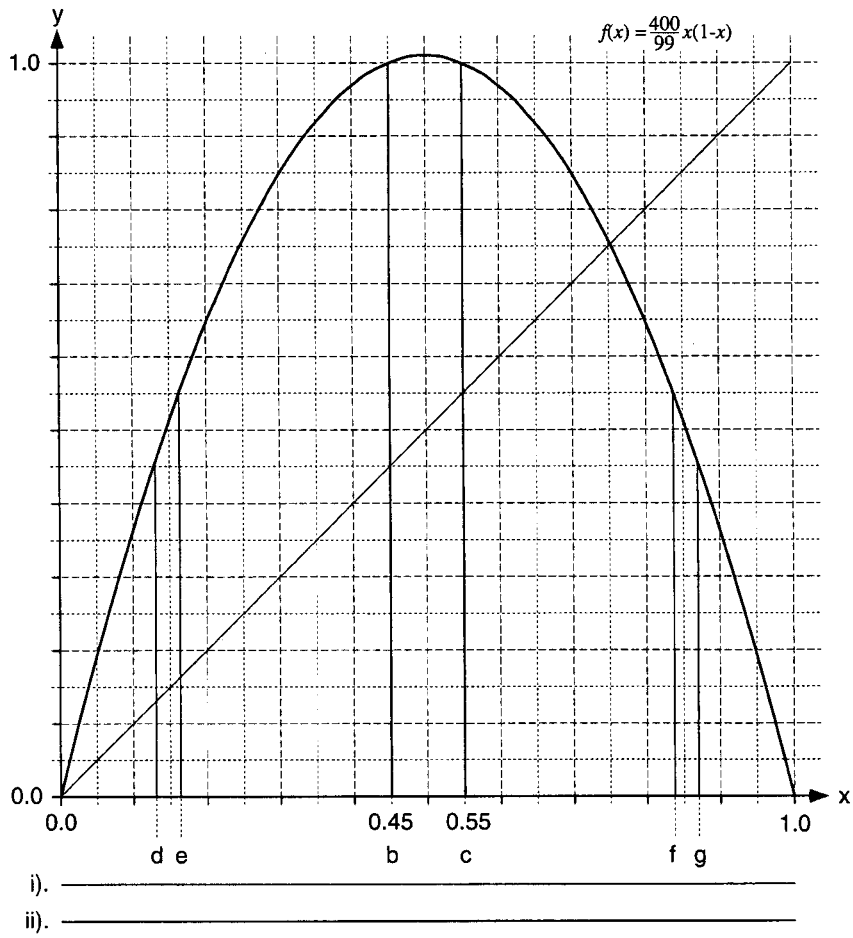
c) Erkläre, warum keiner der Punkte aus Frage b) zur invarianten Menge gehört.

d) Bestimme das maximale invariante Intervall von $f_2(x) = 2x(1 - x)$ und $f_4(x) = 4x(1 - x)$ mit Hilfe des Box-Tests

e) Liegt der Scheitelpunkt der Parabel wie z.B. bei $f_6(x) = 6x(1 - x)$ oberhalb der Waagrechten y = 1, so erkennt man mit Hilfe des Box-Tests, dass es kein invariantes Intervall mehr gibt. Um die Gestalt der invarianten Menge für dieses Fälle zu untersuchen, betrachten wir die Funktion $f(x) = \frac{400}{99}x(1 - x)$, deren Scheitelpunkt nur ganz knapp oberhalb der kritischen Waagrechten y = 1 liegt. Im 1. Schritt wird genau das Intervall [b; c] = [0,45; 0,55] mit Funktionswerten größer als 1 aus dem Intervall [0; 1] entfernt. Gleichzeitig gelangen aber die Intervalle [d; e] und [f; g] in das Intervall [b; c]. Diese beiden Intervalle werden also im 2. Schritt entfernt:



f) Bestimme vier weitere Intervalle, die im 1. Schritt in die Intervalle [d; e] und [f; g] gelangen. Diese vier Intervalle gelangen im 2. Schritt in das Intervall [b; c] und werden schließlich im 3. Schritt entfernt.



g) Wie viele Intervalle werden im 4., 5., …, n-ten Schritt entfernt?

h) Die Endpunkte b, c, d, e, f und g der bisher betrachteten Intervalle gehören alle zur invarianten Menge, weil sie nach endlich vielen Schritten alle auf dem gleichen **Attraktor** landen. Um welchen Attraktor handelt es sich?

Ergebnis: Die invariante Menge für Parabeln $f_a(x) = ax(1 - x)$ mit Streckfaktor $a \geq 1$ ist

- das vollständige Intervall [0; 1], wenn der Scheitelpunkt nicht oberhalb y = 1 liegt, d.h. für $a \leq 4$
- ein total unzusammenhängendes Diskontinuum, wenn der Scheitelpunkt oberhalb y = 1 liegt, d.h. für $a > 1$.