

## 9.5.9. Das Feigenbaum-Diagramm

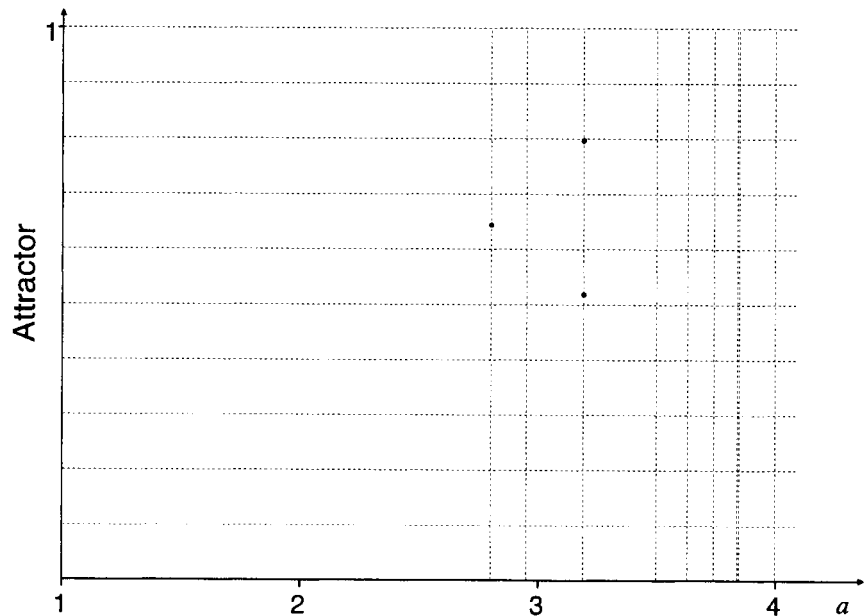
Um die Abhängigkeit des Verhaltens der Iterationsfolge (konvergent, periodisch oder chaotisch) zu untersuchen, trägt man im Feigenbaum-Diagramm die Positionen der Attraktoren über den Streckfaktor  $a$  auf.

Da die Attraktoren oft erst nach vielen Schritten zu erkennen sind, verwenden wir das rechts dargestellte gekürzte Programm. Auf die graphische Darstellung wird ganz verzichtet und die ersten 100 Iterationen werden im Hintergrund durchgeführt, um Rechenzeit zu sparen:

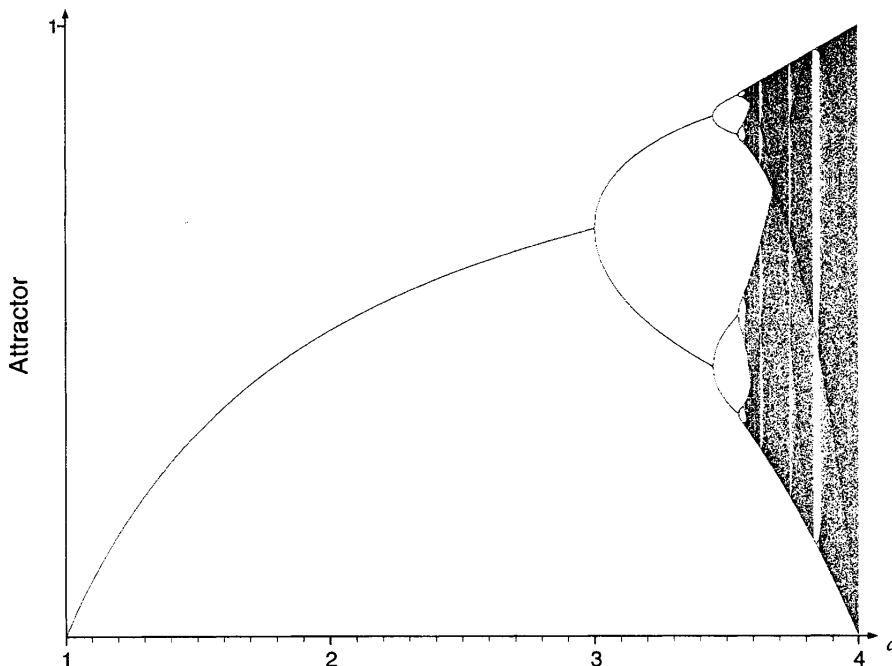
In der folgenden Tabelle und dem dazugehörigen Feigenbaum-Diagramm sind die Attraktoren für  $a = 2,8$  und  $a = 3,18$  bereits eingetragen. Vervollständige die Tabelle und das Diagramm:

```
prgm feige
1 :FIX 3
2 :0,2 → X
3 :Prompt A
4 :For (N,1,100,1)
5 :AX(1 - X) → X
6 :End
7 :For (N,1,15,1)
8 :AX(1 - X) → X
9 :Disp X
10 :End
```

a	Attraktoren
0,00	
0,50	
1,00	
1,50	
2,00	
2,50	
2,80	0,643
2,95	
3,18	0,521; 0,794
3,63	
3,74	
3,84	
3,846	



Mit wachsendem Streck- bzw. Wachstumsfaktor  $a$  geht der Charakter der Iteration bzw. Population von konvergent zu periodisch mit wachsender Periode in völlig unvorhersehbares chaotisches Verhalten über. Das unten abgebildete vollständige Diagramm wird nach dem Physiker Mitchell J. Feigenbaum benannt, der in den siebziger Jahren des 20. Jahrhunderts am Los Alamos National Laboratory im Rahmen der Kernwaffenentwicklung die Zuverlässigkeit und Stabilität von elektrischen Schaltkreisen mit Hilfe dieser Diagramme untersuchte.



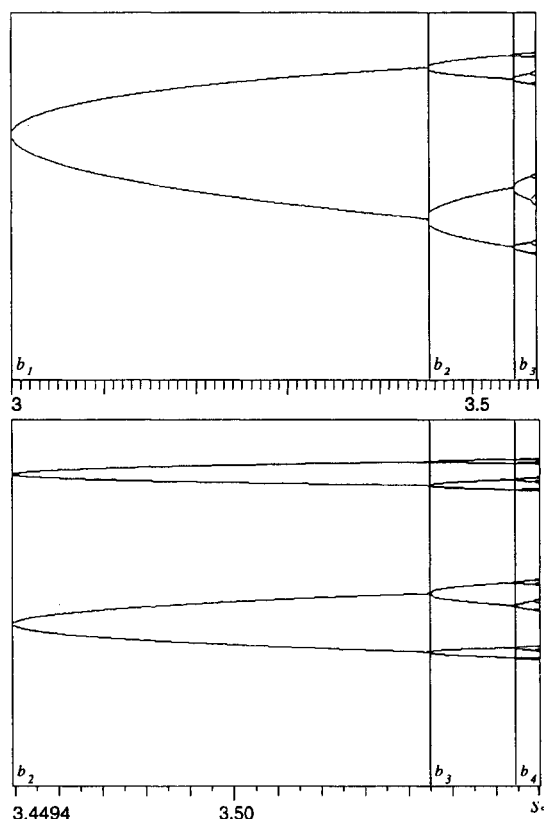
Exakt bei  $a = b_1 = 3$  geht das konvergente in periodisches Verhalten über. die Periode **verdoppelt** sich jeweils bei  $b_2 = 3,4494\dots$ ,  $b_3 = 3,544$ , usw. Die beiden Ausschnitte zeigen den Bereich der Verzweigung bei  $b_2$  und  $b_3$  in entsprechender Vergrößerung. Auffällig ist die Übereinstimmung der Verzweigungspunkte in verschiedenen Vergrößerungen. Die Abstände der Verzweigungspunkte zueinander haben annähernd das gleiche Verhältnis zueinander:

$$\frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_2} \approx \frac{b_3 - b_2}{b_4 - b_3} \approx \frac{b_4 - b_3}{b_5 - b_4} \approx \dots$$

Um diese Folge der Abstandverhältnisse genauer zu untersuchen, berechnen wir konkret die ersten 5 Werte:

- $b_1 = 3,0$   
 $b_2 = 3,449490\dots$      $d_1 = b_2 - b_1 = \underline{\hspace{2cm}}$   
 $b_3 = 3,544090\dots$      $d_2 = b_3 - b_2 = \underline{\hspace{2cm}}$   
 $b_4 = 3,564407\dots$      $d_3 = b_4 - b_3 = \underline{\hspace{2cm}}$   
 $b_5 = 3,568759\dots$      $d_4 = b_5 - b_4 = \underline{\hspace{2cm}}$   
 $b_6 = 3,569692\dots$      $d_5 = b_6 - b_5 = \underline{\hspace{2cm}}$   
 $b_7 = 3,569891\dots$      $d_6 = b_7 - b_6 = \underline{\hspace{2cm}}$

$d_1/d_2$	$d_2/d_3$	$d_3/d_4$	$d_4/d_5$	$d_5/d_6$



Die Abstandsverhältnisse sind nicht gleich, aber sie konvergieren gegen einen Grenzwert, die

$$\text{Feigenbaum-Konstante } \delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} \approx 4,669202\dots$$

Die Feigenbaum-Konstante tritt nicht nur bei quadratischen, sondern auch bei vielen anderen Iterationen und physikalischen Vorgängen auf, deren Verhalten von konvergent über periodisch in chaotisch übergeht. Die wichtigsten Anwendungen sind die Übergänge von laminarer zu turbulenter Strömung an Flugzeugen, Schiffen und in Triebwerken sowie das Verhalten elektronischer Schaltkreise. Die beiden folgenden Diagramme zeigen die Attraktoren links für die Iteration an der Sinusfunktion  $f_a(x) = ax^2 \sin(\pi x)$  und rechts für das Rössler-System von Differentialgleichungen zur Beschreibung oszillierender chemischer Reaktionen.

