Bedingte Konvergenz von Vektorsummen

Arne Pönitz

Mai 2018

Einleitung

Nach dem Riemannsche Umordnungssatz lässt sich eine bedingt konvergent Reihe reeller Zahlen so umordnen, dass die Partialsummen gegen jede beliebige reelle Zahl konvergieren. Da die Partialsummen einer bedingt konvergenten Reihe zwar beliebig groß werden, die Beträge der Summanden aber gegen Null konvergieren, kann man eine Umordnung konstruieren, die eine beliebige reelle Zahl approximiert. Die Verallgemeinerung auf endlichdimensionale Banachräume und insbesondere die komplexen Zahlen und den $\mathbb{R}^n$ gelang 1905 P. Lévy [4] bzw. 1913 E. Steinitz [7]. Der elementare und sehr aufwendige Beweis wurde von W. Gross [2], I. Halperin [3] und P. Rosenthal [5] vereinfacht. Der mehr topologisch motivierte aber ebenfalls konstruktive Ansatz von T. Banakh [1] aus dem Jahr 2017 verkürzt den Beweis deutlich.

Nach einem ersten Abschnitt mit bekannten Ausssagen zu bedingt und absolut konvergenten Reihen wird im zweiten Abschnitt der Beweis des ersten Teils des Satzes von Lévy-Steinitz nach P. Rosenthal behandelt: Die durch Umordnung möglichen Grenzwerte einer bedingt konvergenten Vektorreihe bilden einen affiner Unterraum. Der Beweis enthält Ergebnisse zur Umordnung endlicher Vektorketten, die auch für sich von Interesse sind. Im dritten Abschnitt wird der Beweis des Satzes von Lévy-Steinitz einnschließlich der Aussagen zur Lage des affinen Unterraums nach T. Banakh dargestellt.

1 Absolute und bedingte Konvergenz

1.1 Absolute Konvergenz von Vektorsummen: Sind die Partialsummen einer Vektorfolge $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $v_i \in \mathbb{R}^n$ **absolut** konvergent mit $\sum_{i\in\mathbb{N}} |v_i| < \infty$, so ist der Grenzwert $\sum_{j\in\mathbb{N}} v_{p(j)} = v$ unabhängig von der Permutation p.

Beweis: Für jedes $\epsilon > 0$ und jede Permutation $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i\geq i_0} \|v_i\| < \epsilon$ und für $i_1 = \max\{p^{-1}(j) : 0 \leq j \leq i_0\}$ gilt demnach $\left\|\sum_{i\geq 0} v_i - \sum_{j\geq 0} v_{p(j)}\right\| \leq \left\|\sum_{0<i\leq i_1} v_i - \sum_{0<j\leq i_1} v_{p(j)}\right\| + \sum_{i>i_1} \|v_i\| + \sum_{j>i_1} \left\|v_{p(j)}\right\| \leq \left\|\sum_{i_0<i\leq i_1} v_i - \sum_{\substack{0<j\leq i_1\\ p(j)>i_0}} v_{p(j)}\right\| + 2\epsilon \leq 4\epsilon$. Dabei wurde im vorletzten Schritt die endliche Summe $\sum_{0<j\leq i_1} v_{p(j)}$ so umgeordnet, dass die „großen“ $v_{p(j)}$ mit $p(j) = i$ für $0 \leq i < i_0$ zu Beginn stehen und sich mit den entsprechenden „großen“ Summanden in $\sum_{0<i\leq i_1} v_i$ aufheben. Die übrigen „kleinen“ Summanden $v_i$mit $i > i_0$ und $v_{p(j)}$ mit $p(j) > i_0$ heben sich nicht gegenseitig auf, lassen sich aber wegen der absoluten Konvergenz durch jeweils ϵ abschätzen.

1.2 Bedingte Konvergenz von Zahlensummen und Riemannschen Umordnungssatz: Sind die Partialsummen einer **Zahlenfolge** $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ **bedingt** konvergent mit $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i < \infty$, aber $\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i| = \infty$, so gibt es für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Permutation $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\sum_{j\in\mathbb{N}} x_{p(j)} = x$.

Beweis: Wegen $|x_i| = x_i^+ + x_i^-$ und $x_i = x_i^+ - x_i^-$ sind die Reihen der Positivteile $x_i^+ = \frac{1}{2}(|x_i| + x_i) = \max\{x_i; 0\}$ und der Negativteile $x_i^- = \frac{1}{2}(|x_i| - x_i) = \min\{x_i; 0\}$ **divergent**: $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^+ = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^- = \infty$. Für o.B.d.A. $x > 0$ und $n \geq 1$ definiere zunächst $i_0 = j_0 = 0$ und $i_1 = \min\left\{i_1' \geq 1 : \sum_{i=1}^{i_1'} x_i^+ \geq v\right\}$

sowie $j_1 = \min\left\{ j_1' \geq 1 : \sum_{i=1}^{i_1} x_i^+ - \sum_{j=1}^{j_1'} x_j^- \leq x \right\}$. Anschließend setzt man die Umordnung induktiv fort mit

$$i_{n+1} = \min\left\{ i_{n+1}' \geq i_n : \sum_{m=0}^{n-1} \left(\sum_{i=i_m+1}^{i_{m+1}'} x_i^+ - \sum_{j=j_m+1}^{j_{m+1}} x_j^- \right) + \sum_{i=i_n+1}^{i_{n+1}'} x_i^+ \geq x \right\}$$

sowie

$$j_{n+1} = \min\left\{ j_{n+1}' \geq j_n : \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{i=i_m+1}^{i_{m+1}} x_i^+ - \sum_{j=j_m+1}^{j_{m+1}'} x_j^- \right) \leq x \right\}$$

Für die neugeordneten Partialsummen gilt

$$\left| \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{i=i_{m-1}+1}^{i_m} x_i^+ - \sum_{j=j_{m-1}+1}^{j_m} x_j^- \right) - x \right| \leq \max\left\{ x_{i_n}^+ ; x_{j_n}^- \right\}$$

Da wegen der Konvergenz der Gesamtreihe $\lim_{i\to\infty} |x_i| = 0$, folgt daraus die Behauptung.

1.3 Korollar: Jeder affine Unterraum $v + \Gamma$ des $\mathbb{R}^n$ mit $v \in \mathbb{R}^n$ und einem Untervektorraum $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich als Menge Σ der Grenzwerte der Partialsummen $\sum_{i\in\mathbb{N}} v_{p(i)}$ aller möglichen Permutationen $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ einer Folge $(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ von Vektoren darstellen, denn nach dem Riemannschen Umordnungssatz gibt es für jedes $1 \leq j \leq m$ eine Permutation $p_j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ der Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $x_i = \frac{(-1)^i}{i}$, so dass $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_{p_j(i)} = x_j$.

2 Umordnung von Vektorsummen

2.1 Eingrenzung von Polygonen: Für jede **endliche geschlossene Vektorkette** $(v_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$ für $I = \{1; ...; m\}$ mit $\sum_{i=1}^{m} v_i = 0$ und Beträgen $\|v_i\| \leq 1, i \in I$ gibt es eine Permutation $p : I \to I$ mit $p(1) = 1$, so dass $\forall j \in I$ gilt $\left\| \sum_{i=1}^{j} v_{p(i)} \right\| \leq C_n$ mit $C_1 = 1$ und $C_n \leq \sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}$.

Beweis durch Induktion über n**:** Für $n = 1$ und o.B.d.A $v_1 > 0$ wähle die folgenden $v_{p(2)}, v_{p(3)}, ... < 0$, bis die Summe im Bereich $-1 \leq v_1 + v_{p(2)} + v_{p(3)} + ... < 0$ liegt. Anschließend wähle wieder positive $v_{p(i)}$, bis die Summe wieder im poitiven Bereich liegt, usw., bis alle m Vektoren verbraucht sind. Wegen $\|v_i\| \leq 1$ kann man die $v_{p(i)}$ so wählen, dass die Sume die Bereich $[-1; 1]$ nicht verlässt, womit sich die Behauptung mit $C_1 = 1$ ergibt. Für $n > 1$ wähle unter den 2^{m-1} möglichen Kombinationen die Summe $v = v_1 + u_1 + ... + u_s$ mit $\{u_1; ...; u_s\} \subset \{v_2; ...; v_m\}$ und maximaler Länge $\|v\|$. Man betrachtet den Vektor v als positive Bezugsrichtung und zeigt zunächst mit Hife des **inneren Produktes** $\langle \ldots, \ldots \rangle$, dass die $v_1, u_1, ..., u_s$ in Richtung v ,d.h. $\langle v_1, v\rangle, \langle u_i, v\rangle \geq 0$, und die übrigen Vektoren $\{w_1; ...; w_t\} := \{v_2; ...; v_m\} \setminus \{u_1; ...; u_s\}$ mit $1 + s + t = m$ und $v = -w_1 - ... - w_t$ in Richtung $-v$, d.h.$\langle w_j, v\rangle \leq 0$, orientiert sind:

Angenommen, $\langle v_1, v\rangle < 0$, dann wäre $\|v_1 + w_1 + w_2 + ...\| \geq \left\langle (v_1 + w_1 + w_2 + ...), \frac{-v}{\|v\|} \right\rangle = \frac{-\langle v_1, v\rangle}{\|v\|} + \|v\| > \|v\|$ und damit $v_1 + w_1 + w_2 + ...$ eine längere Vektorkette als L.

Angenommen, $\langle u_i, v\rangle < 0$, dann wäre $\|v - u_i\| \geq \left\langle (v - u_i), \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \frac{-\langle u_i, v\rangle}{\|v\|} + \|v\| > \|v\|$ und damit $v - u_i$ eine längere Vektorkette als L.

Angenommen, $\langle w_j, v\rangle > 0$, dann wäre $\|v + w_j\| \geq \left\langle (v + w_j), \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \frac{\langle w_j, v\rangle}{\|v\|} + \|v\| > \|v\|$ und damit $v + w_j$ eine längere Vektorkette als L.

Sei nun $u' := u - \left\langle u, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \frac{v}{\|v\|}$ die Komponente des Vektors u in dem $n - 1$-dimensionalen Unterraum $\{v\}^\perp := \left\{ u \in \mathbb{R}^n : \left\langle u, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = 0 \right\}$ orthogonal zu $\{v\} := \left\{ u \in \mathbb{R}^n : \left\langle u, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = u \right\}$. Wegen $v' = v_1' + u_1' + ... + u_s' = -w_1' - ... - w_t' = 0$ gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Permutation q auf $\{1; ...; s\}$, so dass $\forall 1 \leq j \leq s$ gilt $\left\| v_1' + \sum\limits_{i=1}^{j} u'_{q(i)} \right\| \leq C_{n-1}$ und eine Permutation r auf $\{1;...;t\}$ mit $q(1) = 1$, so dass $\forall 1 \leq j \leq t$ gilt $\left\| \sum\limits_{i=1}^{j} w'_{r(i)} \right\| \leq C_{n-1}$. Die durch q bzw. r vorgegebene Reihenfolge der $u_{q(i)}$ bzw. $w_{r(i)}$ gewährleistet, dass die Vektorketten **beliebiger Länge** orthogonal zu v nicht länger als C_{n-1} werden. Man sucht nun analog zum Beweis für $n = 1$ passende Teilketten abwechselnd aus den $u_{q(i)}$ bzw. $w_{r(i)}$ so heraus, dass auch ihre Längen **parallel** zu v nicht länger als 1 werden: Man beginnt in positiver Richtung mit v_1 mit $0 \leq \left\langle v_1, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \leq 1$ und findet wegen $\left\langle w_j, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \leq 1$ bzw. $\sum\limits_{j=1}^{t} \left\langle w_j, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \|v\|$ ein $1 \leq t_1 \leq t$, so dass $-1 \leq \left\langle v_1, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle + \sum\limits_{i=1}^{t_1} \left\langle w_{r(i)}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \leq 0$. Anschließend sucht man ein $1 \leq s_1 \leq s$, so dass $0 \leq \left\langle v_1, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle + \sum\limits_{i=1}^{t_1} \left\langle w_{r(i)}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle + \sum\limits_{i=1}^{s_1} \left\langle u_{q(i)}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \leq 1$. Als nächstes kommt wieder ein $t_1 < t_2 \leq t$, so dass $-1 \leq \left\langle v_1, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle + \sum\limits_{i=1}^{t_1} \left\langle w_{r(i)}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle + \sum\limits_{i=1}^{s_1} \left\langle u_{q(i)}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle + \sum\limits_{i=t_1+1}^{t_2} \left\langle w_{r(i)}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \leq 0$, usw., bis alle $u_{q(i)}$ bzw. $w_{r(i)}$ verbraucht sind. Die gesuchte Anordnung ist also $\left(v_1; w_{r(1)}, ..., w_{r(t_1)}, u_{q(1)}, ..., u_{q(s_1)}, w_{r(t_1+1)}, ..., w_{r(t_2)}, ... \right)$. Die Länge der Vektorkette in Richtung v ist höchstens 1 und orthogonal dazu in Richtung $v^{\perp}$ für die $u_{q(i)}$ bzw. $w_{r(i)}$ höchstens $C_{n-1} + C_{n-1}$. Insgesamt gilt also $C_n \leq \sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}$.

2.2 Korollar: Für jede **endliche Vektorkette** $(v_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}^n$ mit $I = \{1;...;m\}$ und $\left\| \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \right\| \leq \epsilon$ sowie Beträgen $\|v_i\| \leq \epsilon, i \in I$ gibt es eine Permutation $p : I \to I$ mit $p(1) = 1$, so dass $\forall j \in I$ gilt $\left\| \sum\limits_{i=1}^{j} v_{p(i)} \right\| \leq \epsilon \left(C_n + 1 \right)$, denn die v_i lassen sich durch $v_{m+1} := -\sum\limits_{i=1}^{m} v_i$ zu einer geschlossenen Vektorkette gemäß 2.1 ergänzen, so dass $\left\| \sum\limits_{i=1}^{j} v_{p(i)} \right\| \leq \epsilon C_n$ und damit $\left\| \sum\limits_{\substack{1 \leq i \leq j \\ p(i) \neq m+1}} v_{p(i)} \right\| \leq \epsilon C_n + \epsilon$.

2.3 Korollar: Für jede **endliche Vektorkette** $(v_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}^n$ mit $I = \{1;...;m\}$ und Beträgen $\|v_i\| \leq \epsilon, i \in I$ sowie jedes $0 < t < 1$ gibt es eine Permutation $p : I \to I$ mit $p(1) = 1$, und ein $j \in I$, so dass $\left\| \sum\limits_{i=1}^{j} v_{p(i)} - tv \right\| \leq \epsilon \sqrt{C_{n-1}^2 + 1}$ mit $v := \sum\limits_{i=1}^{m} v_i$.

Beweis: Sei zunächst $n = 1$ und o.B.d.A $v > 0$ sowie $1 \leq j \leq m$ der kleinste Index mit $\sum\limits_{i=1}^{j} v_i - tv > 0$, dann ist $\sum\limits_{i=1}^{j-1} v_i - tv < 0$ und wegen $v_j < \epsilon$ folgt $\left| \sum\limits_{i=1}^{j} v_i - tv \right| < \epsilon$, womit die Behauptung für $C_0 := 0$ erfüllt ist. Im Fall $n > 1$ betrachtet man wie im Beweis zu 20.4 die Projektionen $v_i' := v_i - \left(v_i, \frac{v}{\|v\|} \right) \frac{v}{\|v\|}$ auf den orthogonalen Unterraum $\{v\}^{\perp}$. Wegen $\sum\limits_{i=1}^{j} v_i' = v' = 0$ und $\|v_i'\| \leq \epsilon$ lässt sich 2.1 anwenden und liefert eine Permutation $p : I \to I$ mit $p(1) = 1$, so dass $\forall j \in I$ gilt $\left\| \sum\limits_{i=1}^{j} v'_{p(i)} \right\| \leq \epsilon C_{n-1}$. Für die Komponenten $\left\langle v_i, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \frac{v}{\|v\|}$ parallel zu v gilt $\left\langle v_i, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle < \epsilon$ und $\left\| \sum\limits_{i=1}^{m} \left\langle v_{p(i)}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \right\| = \|v\| = v, \frac{v}{\|v\|}$, so dass sich wie im Beweis für $n = 1$ ein $j \in I$ finden lässt mit $\left\| \sum\limits_{i=1}^{j} \left\langle v_{p(i)}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle - t \|v\| \right\| < \epsilon$. Die Differenz $\sum\limits_{i=1}^{j} v'_{p(i)} - tv$ der beiden Vektorketten und in Richtung v ist höchstens ϵ und orthogonal dazu in Richtung $v^{\perp}$ höchstens ϵC_{n-1}. Insgesamt gilt also $\left\| \sum\limits_{i=1}^{j} v_{p(i)} - tv \right\| \leq \epsilon \sqrt{C_{n-1}^2 + 1}$.

2.4 Umordnungssatz: Besitzt die Folge $(S_m)_{m\geq 1}$ der Partialsummen $S_m = \sum_{i=1}^{m} v_i$ einer Folge $(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ von Vektoren eine Teilfolge $(S_{m_k})_{k\geq 1}$, die gegen ein $S \in \mathbb{R}^n$ konvergiert, so lässt sich die Gesamtreihe durch eine Bijektion $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so umordnen, dass sie gegen S konvergiert: $\lim_{m\to\infty} \left\| S_{p(m)} - S \right\| = 0$.

Beweis: Man verwendet 2.2, um die zwischen den Gliedern der konvergierenden Teilfolge liegenden Vektoren $v_{m_k+1}, ..., v_{m_{k+1}-1}$ so umzuordnen, dass ihre Partialsummen und damit die Abweichungen von S_{m_k} minimal werden: Für $\delta_k := \|S_{m_k} - S\|$ und $\epsilon_k := \max\{\delta_k + \delta_{k+1}, \sup\{\|v_i\| : i \geq m_k\}\}$ gilt $\left\| \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}-1} v_i \right\| = \left\| \left(\sum_{i=1}^{m_{k+1}} v_i - S \right) - \left(\sum_{i=1}^{m_k} v_i - S \right) - v_{m_{k+1}} \right\| < \delta_{k+1} + \delta_k + \|v_{k+1}\| < 2\epsilon_k$. Gemäß 20.5 existiert eine Permutation $p_k$von $\{m_k + 1; ...; m - 1\}$ mit $\left\| \sum_{i=m_k+1}^{j} v_{p_k(i)} \right\| \leq 2\epsilon_k (C_n + 1) \forall m_k + 1 \leq j \leq m_{k+1} - 1$. Setzt man $p(m) := p_k(i)$ für $m_k + 1 \leq i \leq m_{k+1} - 1$ und $p(m_k) := m_k$ sonst, so folgt $\left\| S_{p(m)} - S_{m_k} \right\| \leq 2\epsilon_k (C_n + 1) \to 0$ und wegen $\|S_{m_k} - S\| = \delta_k \to 0$ schließlich die Behauptung.

2.5 Satz von Lévy und Steinitz I: Die Menge Σ der Grenzwerte der Partialsummen $\sum_{i\in\mathbb{N}} v_{p(i)}$ aller möglichen Permutationen $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ einer gegebenen Folge $(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ von Vektoren ist ein affiner Unterraum der Gestalt $\Sigma = \Sigma + \Gamma$ mit einem Untervektorraum $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$.

Beweis: Für $\Sigma = \emptyset$ ist nichts zu zeigen. Sei also $v \in \Sigma \neq \emptyset$, dann kann o.B.d.A. v_1 durch $v_1 - v$ ersetzt werden und durch diese Verschiebung der gesamten Summe erhält man $0 \in S$. Es genügt nun zu zeigen, dass Σ ein Untervektorraum ist:

$s_1, s_2 \in \Sigma \Rightarrow s_1 + s_2 \in \Sigma$: Da es drei verschiedene Anordnungen gibt, die **unabhängig von endlichen Umordnungen** gegen s_1, 0 bzw. s_2 konvergieren, existieren für jedes $m \geq 1$ **endliche** Indexmengen $\{1; ...; m\} \subset I_m \subset J_m \subset K_m \subset I_{m+1} \subset ...$ mit $\|\sum_{i\in I_m} v_i - s_1\| < 2^{-m}$, $\|\sum_{i\in J_m} v_i - 0\| < 2^{-m}$ und $\|\sum_{i\in K_m} v_i - s_2\| < 2^{-m}$. Die Summe bewegt sich also auf I_m in Richtung s_1, dann auf $J_m \setminus I_m$ wieder zurück in Richtung $-s_1$ bzw. 0 und schließlich auf $K_m \setminus J_m$ in Richtung s_2. Wenn man die Summanden im Bereich $J_m \setminus I_m$ entfernt, werden die Restsummen gegen $s_1 + s_2$ streben: Mittels einer endlichen Permutation $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ lassen sich die Indexmengen I_m, J_m, K_m und I_{m+1} aufsteigend sortieren, so dass es Indizes $i_m < j_m < k_m < i_{m+1} < ...$ gibt mit $I_m = p[\{1; ...; i_m\}]$, $J_m = p[\{1; ...; j_m\}]$, usw. und damit $\left\| \sum_{i=1}^{i_m} v_{p(i)} - s_1 \right\| < \frac{1}{m}$, $\left\| \sum_{i=1}^{j_m} v_{p(i)} \right\| < \frac{1}{m}$ und $\left\| \sum_{i=1}^{k_m} v_{p(i)} - s_2 \right\| < \frac{1}{m}$. Wegen $\left\| \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{p(i)} - s_2 \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{k_m} v_{p(i)} - s_2 - \sum_{i=1}^{j_m} v_{p(i)} \right\| < \frac{2}{m}$ folgt daraus für den Rest $\left\| \sum_{i=1}^{i_m} v_{p(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{p(i)} - (s_1 + s_2) \right\| < \frac{3}{m}$. Wenn man den hinteren Abschnitt mittels $p'(p(i)) = \begin{cases} p(i + j_m - i_m) & \text{für } i_m < i \leq i_m + k_m - j_m \\ p(i - j_m + i_m) & \text{für } i_m + k_m - j_m < i \leq k_m \\ p(i) & \text{sonst} \end{cases}$ nach vorne in die Lücke schiebt, ergibt sich eine Partialsumme $\left\| \sum_{i=1}^{i_m+k_m-j_m} v_{p'\circ p(i)} - (s_1 + s_2) \right\| < \frac{3}{m}$ und damit eine gegen $s_1 + s_2$ konvergierende Teilfolge, woraus nach 2.4 die Behauptung folgt.

$s \in \Sigma \Rightarrow ts \in \Sigma \forall t \in \mathbb{R}$: Man verwendet o.B.d.A s_2 mit den Anordnungen aus Teil 1. und nutzt die eben bewiesene Additivität, um sich auf $0 < t < 1$ zu beschränken und damit 2.3 anwenden zu können: Mit $\delta_m = \sup\left\{ \left\| v_{p(i)} \right\| : i = j_m + 1, ..., k_m \right\}$ gibt es eine Permutation q_m von $\{p(j_m + 1), ..., p(k_m)\}$, so dass $\left\| \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{q_m(p(i))} - t \cdot \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{p(i)} \right\| \leq \delta_m \sqrt{C_{n-1}^2 + 1}$. Wegen $\left\| t \cdot \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{p(i)} - ts_2 \right\| < \frac{2}{m}$ und $\left\| \sum_{i=1}^{j_m} v_{p(i)} \right\| < \frac{1}{m}$ folgt $\left\| \sum_{i=1}^{j_m} v_{p(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{q_m(p(i))} - ts_2 \right\| \leq \delta_m \sqrt{C_{n-1}^2 + 1} + \frac{3}{m}$. Aus der Annahme $\Sigma \neq \emptyset$ folgt $\lim_{m\to\infty} \delta_m = 0$, so dass die Teilfolge der so umgeordneten Partialsummen gegen ts_2 konvergiert und aus 2.4 folgt wieder die Behauptung.

$s \in \Sigma \Rightarrow -s \in \Sigma$: Man verwendet wieder s_2 mit den Anordnungen aus Teil 1. und betrachtet $\left\| \sum_{i=1}^{j_m} v_{p(i)} + \sum_{i=k_m+1}^{j_{m+1}} v_{p(i)} - (-s_2) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{j_m} v_{p(i)} + \sum_{i=1}^{j_{m+1}} v_{p(i)} - \left(\sum_{i=1}^{k_m} v_{p(i)} - s_2 \right) \right\| < \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m}$. Analog zu 1. lässt sich durch die Rückverschiebung der letzten $j_{m+1} - (k_m + 1)$ Glieder eine gegen $-s_2$ konvergierende Teilfolge von Partialsummen bilden, so dass sich mit 2.4 erneut die Behauptung ergibt.

3 Mögliche Summen bedingt konvergenter Vektorreihen

3.1 Komponentenweise bedingte Konvergenz: Eine Reihe $\sum_{i\in\mathbb{N}} v_i$ mit $v_i \in \mathbb{R}^n$ heißt **bedingt konvergent**, wenn es eine Permutation $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt mit $\left\|\sum_{i\in\mathbb{N}} v_{p(i)}\right\| < \infty$ und **komponentenweise bedingt konvergent**, wenn die Summen $\sum_{i\in\mathbb{N}} \langle v_i, w\rangle$ der Projektionen in alle Richtungen $w \in \mathbb{R}^n$ und insbesondere die Summen $\sum_{i\in\mathbb{N}} v_{ij}$ der Komponenten $v_{ij} = \langle v_i, e_j\rangle$ bedingt konvergent sind. Aufgrund der (Sesqui-)Linearität des Skalarproduktes und der Schwarz-Ungleichung gilt $\left|\sum\limits_{i=0}^{m} \langle v_i, w\rangle\right| = \left|\left\langle \left(\sum\limits_{i=0}^{m} v_i\right), w\right\rangle\right| \leq \left\|\sum\limits_{i=0}^{m} v_i\right\| \cdot \|w\|$ für alle $m \in \mathbb{N}$, d.h., eine bedingt konvergente Vektorreihe ist insbesondere komponentenweise bedingt konvergent.

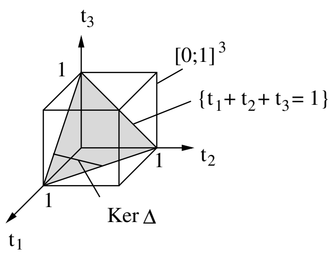
3.2 Folge der Summanden: Für eine komponentenweise bedingt konvergente Reihe $\sum_{i\in\mathbb{N}} v_i$ konvergiert die Folge der Summanden gegen Null: $\lim\limits_{i\to\infty} \|v_i\| = 0$.

Beweis: Angenommen, es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass die Menge $E = \{n \in \mathbb{N} : \|v_i\| > \epsilon\}$ unendlich ist, und die Folge $\left(\frac{v_i}{\|v_i\|}\right)_{i\in E} \subset S$ auf der kompakten Menge S einen Häufungspunkt v_∞ besitzt mit einem $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\left\|\frac{v_i}{\|v_i\|} - v_\infty\right\| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $i \geq n_0$. Dann gilt $|\langle v_i, v_\infty\rangle| = \|v_i\| \cdot \left|\left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, v_\infty\right\rangle\right| = \|v_i\| \cdot \left|\left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, v_\infty - \frac{v_i}{\|v_i\|}\right\rangle + \left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_i}{\|v_i\|}\right\rangle\right| \geq \epsilon\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{\epsilon}{2}$ für alle $i \in E$, so dass die Reihe $\sum_{i\in\mathbb{N}} \langle v_i, v_\infty\rangle$ nicht in eine konvergente Reihe umgeordnet werden kann im Widerspruch zur Voraussetzung der komponentenweise bedingten Konvergenz.

3.3 Divergenzpunkte und absolute Konvergenz: Ein Punkt $x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ heißt **Divergenzpunkt** der Reihe $\sum_{i\in\mathbb{N}} v_i$, wenn die Menge $\mathbb{N}_U := \left\{i \in \mathbb{N} : \frac{v_i}{\|v_i\|} \in U\right\}$ für jede Umgebung $U \subset S$ von x unendlich ist und die Teilfolge $\sum_{i\in\mathbb{N}_U} \|v_i\| = \infty$ divergiert. Die Menge $D \subset S$ aller Divergenzrichtungen einer bedingt konvergenten Reihe ist nach Definition abgeschlossen in S und als Teilmenge der kompakten und insbesondere abgschlossenen **Einheitsspäre** S auch abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$. Im Fall $D = \emptyset$ gibt es eine endliche Überdeckung $\mathcal{U}$ offener Mengen $U \subset S$, für die jeweils $\sum_{i\in\mathbb{N}_U} \|v_i\| < \infty$ und folglich $\sum_{i\in\mathbb{N}} \|v_i\| \leq \sum_{U\in\mathcal{U}} \sum_{i\in\mathbb{N}_U} \|v_i\| < \infty$, d.h., **absolute Konvergenz** mit $\Gamma = \mathbb{R}^n$, $\Gamma^\perp = \emptyset$ und $\Sigma = \{v\}$ für $v = \sum_{i\in\mathbb{N}} v_i$.

3.4 Konvexe Hülle der Divergenzpunkte: Im Fall $D \neq \emptyset$ enthält die **konvexe Hülle** $\text{co}(D) = \left\{\sum\limits_{k=0}^{m} t_k x_k : \sum\limits_{k=0}^{m} t_k = 1,\ t_k \in [0;1],\ x_k \in D,\ 0 \leq k \leq m,\ m \in \mathbb{N}\right\}$ den Koordinatenursprung, denn ansonsten existiert nach dem Satz von Hahn-Banach ([6, Th 3.4]) ein $w \in \mathbb{R}^n$ und ein $\epsilon > 0$ mit $\langle x, w\rangle > \epsilon \forall x \in \text{co}(D)$ sowie wegen der Stetigkeit des linearen Funktionals $\langle \ldots, w\rangle : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auch eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $\langle x, w\rangle > \frac{\epsilon}{2} \forall x \in U$, so dass $\sum_{i\in\mathbb{N}} \left\langle v_{p(i)}, w\right\rangle$ für keine Permutation p konvergieren kann im Gegensatz zur Annahme der komponentenweisen bedingten Konvergenz von $\sum_{i\in\mathbb{N}} v_i$.

3.5 Konvexe Hülle der minimalen Divergenzpunkte: Die minimale Teilmenge $D_0 \subset D$ mit $0 \in \text{co}(D_0)$ ist affin unabhängig und besteht daher aus höchstens $n+1$ Punkten, denn im Fall $D_0 = \{x_o, ..., x_{n+1}\}$ ist der **Kern** $\text{Ker}\Delta = \left\{t = (t_1; ...; t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \Delta(t) = 0\right\}$ der linearen Abbildung $\Delta : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ mit $\Delta(t) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} t_k x_k \wedge t_0 = 1 - \sum\limits_{k=1}^{n+1} t_k$ für $x_0, ..., x_{n+1} \in D \subset \mathbb{R}^n$ ein mindestens eindimensionaler und höchstns $(n+1)$-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^{n+1}$ in der Form $\text{Ker}\Delta = \left\{t \in \mathbb{R}^{n+1} : t = a + \sum\limits_{r=1}^{n+1} s_r b_r,\ s_1, ..., s_{n+1} \in \mathbb{R}\right\}$ mit $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ und linear unabhängigen $b_1, ..., b_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ sowie $b_1 \neq 0$, der wegen 3.4 den Definitionsbereich $[0;1]^{n+2}$ der konvexen Hülle und für jedes $0 \leq j \leq n+1$ mit $\langle e_j, b_r\rangle \neq 0$ seinen **Rand** $\left\{(t_0, ..., t_{n+1}) \in [0;1]^{n+2} : \exists 0 \leq j \leq n+1 : t_j = 0\right\}$ schneidet. Dabei kann man sich das



Urbild $\Delta^{-1}[\mathrm{co}(D_0)]$ der konvexen Hülle als mindestens eindimensionale und höchstns $(n+1)$-dimensionale Hyperfläche vorstellen, die durch den Schnitt der $(n+1)$-dimensionalen Hyperebene $\left\{t=(t_0;...;t_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+2}:\sum\limits_{k=0}^{n+1}t_k=1\right\}$ mit dem Einheitswürfel $[0;1]^{n+2}$ entsteht. An jedem dieser Durchstoßpunkte ist mindestens ein $t_j=0$ und $0=\sum\limits_{\substack{0\le k\le n+1\\k\ne j}}t_kx_k\wedge\sum\limits_{\substack{0\le k\le n+1\\k\ne j}}t_k=1$ erfüllt, d.h., $0\in\mathrm{co}(D_0\setminus\{x_j\})$. Die minimale konvexe Hülle enthält damit sogar eine **offene Umgebung** des Ursprungs: $0\in U\subset\mathrm{co}(D_0)$ für ein $U\in\mathcal{U}(0)$, denn falls der Ursprung auf dem **Rand** $\left\{\sum\limits_{k=1}^{m}t_kx_k\in\mathrm{co}(D_0):\exists 1\le j\le n+1:t_j=0\right\}$ liegt, könnte wieder der entsprechende Divergenzpunkt x_j entfernt werden, d.h. $0\in\mathrm{co}(D_0\setminus\{x_j\})$ im Widerspruch zum minimalen Charakter von D_0.

3.6 Lineare Hülle der minimalen Divergenzpunkte: Sei $X_0=\left\{\sum\limits_{k=1}^{m}t_kx_k:x_1,...,x_m\in D_0\right\}$ die **lineare Hülle** von $D_0=\{x_1;...;x_m\}$ mit der **Projektion** $pr_0:\mathbb{R}^n\to X_0$, wobei $pr_0(v)=\sum\limits_{k=1}^{m}\left\langle v,\frac{x_k}{\|x_k\|}\right\rangle\frac{x_k}{\|x_k\|}$ und $X_1=X_0^{\perp}=\{y\in\mathbb{R}^n:\langle x,y\rangle=0\forall x\in X_0\}$ das **orthogonale Komplement** mit der entsprechenden **Projektion** $\mathrm{pr}_1:\mathbb{R}^n\to X_1$, wobei $\mathrm{pr}_1(v)=\sum\limits_{k=m+1}^{n}\left\langle v,\frac{x_k}{\|x_k\|}\right\rangle\frac{x_k}{\|x_k\|}$ für die **Basis** $\{x_{m+1};...;x_n\}$ von $D_0^{\perp}$. Dann gibt es eine Teilmenge $\Omega\subset\mathbb{N}$ mit $\sum_{i\in\Omega}\|\mathrm{pr}_1(v_i)\|<\infty$ und $\sum_{i\in\Omega\cap\mathbb{N}_U}\|v_i\|=\infty$ für jede Umgebung $U\subset S$ aller $x_k\in D_0$

Beweis: Für jedes $n\in\mathbb{N}$ und $v\in B_n:=B_{2^{-n}}(x)\subset S$ gilt $\|\mathrm{pr}_1(v)\|=\|\mathrm{pr}_1(v-x)+\mathrm{pr}_1(x)\|=\|\mathrm{pr}_1(v-x)+0\|\le\|v-x\|<2^{-n}$. Für jedes $x_k\in D_0\subset D$ ist $\mathbb{N}_{B_n}$ unendlich und $\sum_{i\in\mathbb{N}_{Bn}}\|v_i\|=\infty$. Daher und nach 3.2 gibt es eine endliche Teilmenge $F_n\subset\mathbb{N}_{B_n}$ mit $n<\sum_{i\in F_n}\|v_i\|<n+1$. Für $O_k=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$ gilt dann $\sum_{i\in O_k}\|\mathrm{pr}_1(v_i)\|\le\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in F_n}\|\mathrm{pr}_1(v_i)\|=\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in F_n}\left\|\mathrm{pr}_1\left(\frac{v_i}{\|v_i\|}\right)\right\|\cdot\|v_i\|\le\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n+1}{2^n}<\infty$ und für $\Omega=\bigcup\limits_{k=1}^{m}O_k$ folglich die erste Behauptung. Für eine beliebige Umgebung $U\subset S$ von $x_k\in D_0$ gibt es ein $n\in\mathbb{N}$ mit $B_{2^{-n}}(x_k)\subset U$ und damit $F_m\subset\mathbb{N}_{B_m}\subset\mathbb{N}_U$ für alle $m\ge n$, so dass $\sum_{i\in\Omega\cap\mathbb{N}_U}\|v_i\|\ge\sum_{i\in\bigcup_{m\ge n}F_m}\|v_i\|\ge\sup\limits_{m\ge n}m=\infty$, womit die zweite Behauptung gezeigt ist.

3.7 Näherung der linearen Hülle der minimalen Divergenzpunkte: Es gibt eine positive Konstante C, so dass für $x\in X_0$, $\epsilon>0$ und jede endliche Teilmenge $F\subset\Omega$ eine weitere endliche Teilmenge $E\subset\Omega\setminus F$ existiert mit $\|x-\sum_{i\in E}v_i\|<\epsilon$ und $\|\sum_{i\in E'}v_i\|\le C\cdot\max\{\|x\|,\epsilon\}$ für alle $E'\subset E$.

Beweis: Nach 3.5 gibt es ein $\delta<\frac{1}{4}$ mit $B_\delta(0)\subset\mathrm{co}(D_0)$ und $B_\delta(x_i)\cap B_\delta(x_j)=\emptyset\,\forall x_i,x_j\in D_0$. Seien $x\in X_0$, $\epsilon<\delta$ und die endliche Teilmenge $F\subset\Omega$ gegeben. Für $c=\frac{1}{\delta}\max\{\|x\|,\epsilon\}$ folgt $\frac{x}{c}\in B_\delta(0)\subset\mathrm{co}(D_0)$ und damit $x=\sum\limits_{k=1}^{m}c\cdot t_kx_k$ für $x_1,...,x_m\in D_0$ und $0\le t_k\le 1$ mit $\sum\limits_{k=1}^{m}t_k=1$. Auf der sphärischen Kreisscheibe $S_k=B_\delta(x_k)\cap S$ gilt zunächst $x,y\in S_k\Rightarrow\langle x,y\rangle=\langle x,x\rangle+\langle x,y-x\rangle\ge 1-\|x-y\|>1-2\delta\ge\frac{1}{2}$, woraus für den zugehörigen Richtungskegel $\hat{S}_k=\{t\cdot x:x\in S_k,t>0\}$ die Abschätzung $x,y\in\hat{S}_k\Rightarrow\|x+y\|\ge\left\langle x+y,\frac{x}{\|x\|}\right\rangle=\|x\|+\|y\|\left\langle\frac{y}{\|y\|},\frac{x}{\|x\|}\right\rangle\ge\|x\|+\frac{1}{2}\|y\|$ folgt. Nach 3.6 sind die Mengen $\Omega_k:=\left\{i\in\Omega:\frac{v_i}{\|v_i\|}\in S_k\right\}=\left\{i\in\Omega:v_i\in\hat{S}_k\right\}$ für $1\le k\le m$ unendlich und $\sum_{i\in\Omega_k}\|v_i\|\ge\sum_{i\in\Omega_k\cap\mathbb{N}_U}\|v_i\|=\infty$. Da wegen $(v_i)_{i\in\Omega_k}\subset\hat{S}_k$ auch $\sum_{i\in\Omega_k}v_i\in\hat{S}_k$ und außerdem $\lim\limits_{i\to\infty}\|v_i\|=0$ gilt, lässt sich für eine gegebene endliche Teilmenge $F\subset\Omega_k$ eine weitere endliche Teilmenge $E_k\subset\Omega_k\setminus F$ finden, so dass $s_k=\sum_{i\in E_k}v_i\in\hat{S}_k$ und $c\cdot t_k-\frac{\epsilon}{2m}<\|s_k\|\le c\cdot t_k$. Damit folgt $\|s_k-c\cdot t_kx_k\|\le\left\|\|s_k\|\cdot\frac{s_k}{\|s_k\|}-c\cdot t_k\cdot\frac{s_k}{\|s_k\|}\right\|+\left\|c\cdot t_k\cdot\frac{s_k}{\|s_k\|}-c\cdot t_kx_k\right\|=\|\|s_k\|-c\cdot t_k\|+c\cdot t_k\left\|\frac{s_k}{\|s_k\|}-x_k\right\|<\frac{\epsilon}{2m}+c\cdot t_k\cdot\frac{\epsilon}{2c}$ und für die endliche Teilmenge $E=\bigcup\limits_{k=1}^{m}E_k\subset\Omega\setminus F$ folgt $\|\sum_{i\in E}v_i-x\|=\left\|\sum_{i\in E}v_i-\sum\limits_{k=1}^{m}c\cdot t_kx_k\right\|\le\sum\limits_{k=1}^{m}\left\|\sum_{i\in E_k}v_i-c\cdot t_kx_k\right\|<\sum\limits_{k=1}^{m}\left(\frac{\epsilon}{2m}+c\cdot t_k\cdot\frac{\epsilon}{2c}\right)=\frac{\epsilon}{2}\left(1+\sum\limits_{k=1}^{m}t_k\right)=\epsilon$.

Für die zweite Behauptung sei $E'\subset E$ und $E_k':=E\cap E_k$. Dann ist $\sum_{i\in E_k'}v_i\in\hat{S}_k$ mit $\left\|\sum_{i\in E_k'}v_i\right\|\le$

$\left\|\sum_{i\in E_k} v_i\right\| \le c\cdot t_k \le c$, also $\sum_{i\in E'_k} v_i = t\cdot y$ mit $y\in S_k$ und $0\le t\le c$, so dass $\|\sum_{i\in E'} v_i\| \le c\cdot\delta\cdot C = C\cdot\max\{\|x\|,\epsilon\}$ mit $C := \frac{1}{\delta}\sup\left\{\left\|\sum_{k=1}^{m} t_k y_k\right\| : 0\le t_k\le 1, y_k\in B_\delta(x_k), x_k\in D_0\right\}$.

3.8 Die Richtungen absoluter Konvergenz sind orthogonal zur linearen Hülle der Divergenzpunkte: $\Gamma = \{y\in\mathbb{R}^n : \sum_{i\in\mathbb{N}} |\langle y, v_i\rangle| < \infty\} = \{y\in X_1 : \sum_{i\in\mathbb{N}} |\langle y, \mathrm{pr}_1(v_i)\rangle| < \infty\} = \Gamma_1$

Beweis: $\subset$: Angenommen, $\exists y\in\Gamma\setminus X_1$, dann existiert insbesondere ein $x_k\in D_0$ mit $\langle y, x_k\rangle \ne 0$ und die Menge $\mathbb{N}_U := \left\{i\in\mathbb{N} : \frac{v_i}{\|v_i\|}\in U\right\}$ für die offene Umgebung $U = \{x\in S : |\langle y,x\rangle| > |\langle y,x_k\rangle|\}$ von y ist unendlich und $\sum_{i\in\mathbb{N}_U} \|v_i\| = \infty$. Damit folgt aber $|\langle y,v_i\rangle| > \|v_i\|\cdot|\langle y,x_k\rangle| \forall i\in\mathbb{N}_U$ und folglich $\sum_{i\in\mathbb{N}_U} |\langle y,v_i\rangle| = \infty$ im Widerspruch zur Auswahl von y. $\supset$: Für $y\in X_1$ ist $\langle y, \mathrm{pr}_1(v_i)\rangle = \langle y,v_i\rangle - \langle y,\mathrm{pr}_0(v_i)\rangle = \langle y,v_i\rangle - 0 = \langle y,v_i\rangle$, woraus sich die Behauptung ergibt.

3.9 Satz von Lévy und Steinitz II: Die Menge Σ aller möglichen Summen $\sum_{i\in\mathbb{N}} v_{p(i)}$ zu den Permutationen $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ einer Folge $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^n$ von Vektoren ist ein affiner Unterraum: $\Sigma = \Sigma + \Gamma^\perp$, wobei der Untervektorraum $\Gamma = \{y\in\mathbb{R}^n : \sum_{i\in\mathbb{N}} |\langle y,v_i\rangle| < \infty\}$ die Richtungen absoluter Konvergenz und $\Gamma^\perp = \{x\in\mathbb{R}^n : \langle y,x\rangle = 0 \forall y\in\Gamma\}$ das orthogonale Komplement zu Γ beschreiben. Dabei gilt $\Sigma\ne\emptyset$ genau dann, wenn $\sum_{i\in\mathbb{N}} v_i$ komponentenweise bedingt konvergent ist. Im Fall absoluter Konvergenz mit $\sum_{i\in\mathbb{N}}\|v_i\| < \infty$ ist $\Sigma = \{v\}$ mit $v = \sum_{i\in\mathbb{N}} v_i$ sowie $\Gamma = \mathbb{R}^n$und folglich $\Gamma^\perp = \emptyset$.

Beweis durch Induktion nach n: Aus der komponentenweise bedingten Konvergenz von $\sum_{i\in\mathbb{N}} v_i$ in $\mathbb{R}^n$ folgt nach 3.8 die komponentenweise bedingte Konvergenz von $\sum_{i\in\Omega}\mathrm{pr}_1(v_i)$ im Hilbertraum $X_1\simeq\mathbb{R}^m$ mit der Dimension $m<n$, falls keine absolute Konvergenz vorliegt. (vgl. 3.3). Nach einem geeigneten Basiswechsel kann die Induktionsannahme auf $\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{pr}_1(v_i)$ angewandt werden, so dass die Menge Σ_1 aller möglichen Summen $\sum_{i\in\Omega}\mathrm{pr}_1\left(v_{p(i)}\right)$ die Struktur $\Sigma_1 = \Sigma_1 + \Gamma_1^\perp\cap X_1 = \Sigma_1 + \Gamma^\perp\cap X_1$ besitzt, denn nach 3.8 gilt $\Gamma_1 = \Gamma = \{y\in\mathbb{R}^n : \sum_{i\in\mathbb{N}}|\langle y,v_i\rangle| < \infty\}$. Man kann nun zeigen, dass für die Menge Σ aller möglichen Summen $\sum_{i\in\mathbb{N}} v_{p(i)}$ gilt $\Sigma = \Sigma_1 + \left(\Gamma^\perp\cap X_1\right)\oplus X_0 = \Sigma_1 + \Gamma^\perp$, wobei die Gleichung $\left(\Gamma^\perp\cap X_1\right)\oplus X_0 = \Gamma^\perp$ mit Hilfe der Zerlegung $x = \mathrm{pr}_0(x) + \mathrm{pr}_1(x)$ sowie der Beziehung $\Gamma\subset X_1$ eingesehen werden kann. Die Inklusion $\Sigma\subset\Sigma_1 + \left(\Gamma^\perp\cap X_1\right)\oplus X_0$ ergibt sich trivialerweise aus der Zerlegung $\mathbb{R}^n = X_0\oplus X_1$. Für die Umkehrung ist zu zeigen, dass für jedes $x\in X_0$ und $y\in\Sigma_1$ eine Permutation p von $\mathbb{N}$ existiert mit $\sum_{i\in\mathbb{N}} v_{p(i)} = x+y$. Die gewünschte Permutation p wird zweckmäßigerweise durch eine Wohlordnung $\preccurlyeq$ auf $\mathbb{N}$ gemäß $p(i) = \max_{\le}[0;i]_{\preccurlyeq}$ definiert, so dass $p(i)\le p(j)\Leftrightarrow i\preccurlyeq j$ und $\sum_{i\in\mathbb{N}}^{\preccurlyeq} v_i = x+y$, d.h., für jedes $\epsilon>0$ existiert ein $k\in\mathbb{N}$, so dass für alle $j\succcurlyeq k$ gilt $\left\|\sum_{i\succcurlyeq j} v_i - (x+y)\right\| < \epsilon$. Nach Induktionsannahme gibt es eine eine Permutation p von $\mathbb{N}$ mit $\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{pr}_1\left(v_{p(i)}\right) = y$ und damit wie eben beschrieben eine Wohlordnung $\preccurlyeq_1$ auf $\mathbb{N}$ und insbesondere auf $\Lambda = \mathbb{N}\setminus\Omega$ mit $i\preccurlyeq_1 j\Leftrightarrow p(i)\le p(j)$. Damit erhält man bereits $\sum_{i\in\Lambda}^{\preccurlyeq_1}\mathrm{pr}_1(v_i) + \sum_{i\in\Omega}\mathrm{pr}_1(v_i) = y$. Auf Ω ist der Grenzwert der **absolut konvergenten** Teilreihe $\sum_{i\in\Omega}\mathrm{pr}_1(v_i)\in X_1$ **unabhängig von der Permutation bzw. Wohlordnung** und erlaubt daher weitere Anpassung der Wohlordnung $\preccurlyeq_1$ auf Ω, so dass die endgültige Wohlordnung $\preccurlyeq$ auf $\mathbb{N} = \Omega\cup\Lambda$ auf Λ mit $\preccurlyeq_1$ übereinstimmt und wie bisher $\sum_{i\in\mathbb{N}}^{\preccurlyeq}\mathrm{pr}_1(v_i) = y$ gilt sowie zusätzlich $\sum_{i\in\mathbb{N}}^{\preccurlyeq}\mathrm{pr}_0(v_i) = x$. Dazu konstruiert man induktiv die absteigenden wohlgeordneten Mengenfolgen $(\Lambda_k;\preccurlyeq)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\Omega_k;\le)_{k\in\mathbb{N}}$ sowie eine aufsteigende Folge $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften für $k\in\mathbb{N}$:

1. $\Lambda_{k+1} = \Lambda_k\setminus\{\min\Lambda_k\}$
2. $\Omega_{k+1}\subset\Omega_k\setminus\{\min\Omega_k\}$
3. $F_{k+1} = F_k\cup\{\min\Lambda_k\}\cup(\Omega_k\setminus\Omega_{k+1})$
4. $\left\|x - \sum_{i\in F_{k+1}}\mathrm{pr}_0(v_i)\right\| < 2^{-k}$
5. $\forall E\subset F_{k+1}\setminus F_k : \|\sum_{i\in E} v_i\| \le C\cdot\left(2^{-k} + \|v_{\min\Lambda_k} + v_{\min\Omega_k}\|\right)$.

Nach 3.7 lässt sich eine endliche Menge $F_0\subset\Omega$ finden mit $\|x - \sum_{i\in F_0}\mathrm{pr}_0(v_i)\| \le \|x - \sum_{i\in F_0} v_i\| < 1$. Damit definiert man $\Omega_0 = \Omega\setminus F_0$ und $\Lambda_0 = \Lambda = \mathbb{N}\setminus\Omega$. Für breits konstruierte F_k,Ω_k,Λ_k sei $a_k := x - \mathrm{pr}_0\left(v_{\min\Lambda_k} + v_{\min\Omega_k} + \sum_{i\in F_k} v_i\right)\in X_0$ mit $\|a_k\| \le \left\|x - \sum_{i\in F_k}\mathrm{pr}_0(v_i)\right\| + \|v_{\min\Lambda_k} + v_{\min\Omega_k}\| < 2^{-k} +$

$\|v_{\min\Lambda_k}+v_{\min\Omega_k}\|$ wegen 4. Mit 3.7 lässt sich eine endliche Teilmenge $E_k \subset \Omega_k \setminus F_k \cup \{\min\Omega_k\}$ finden mit $\left\|a_k - \sum_{i\in E_k} v_i\right\| < 2^{-k-1}$ und für jede Teilmenge $E \subset E_k$ gilt $\|\sum_{i\in E} v_i\| < C\cdot\max\left\{2^{-k-1}; \|a_k\|\right\} \leq C\cdot\left(2^{-k}+\|v_{\min\Lambda_k}+v_{\min\Omega_k}\|\right)$. Definiere nun $F_{k+1} := F_k \cup E_k \cup \{\min\Lambda_k; \min\Omega_k\}$, $\Omega_{k+1} := \Omega_k \setminus (E_k \cup \{\min\Omega_k\})$ und $\Lambda_{k+1} = \Lambda_k \setminus \{\min\Lambda_k\}$. Auf $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k = \mathbb{N}$ wird nun die angpasste Fortsetzung $\preccurlyeq$ der Wohlordnung $\preccurlyeq_1$ defniert mit $i \preccurlyeq j \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : i \in F_k \wedge j \notin F_k$. Aufgrund der absoluten Konvergenz von $\sum_{i\in\Omega} \mathrm{pr}_1(v_i)$ undabhängig von der Ordnung gilt nach wie vor $\sum_{i\in\mathbb{N}}^{\preccurlyeq} \mathrm{pr}_1(v_i) = \sum_{i\in\Lambda}^{\preccurlyeq} \mathrm{pr}_1(v_i) + \sum_{i\in\Omega}^{\preccurlyeq} \mathrm{pr}_1(v_i) = y$. Wegen 4. und 5. sowie 3.2 gilt nun aber zusätzlich $\sum_{i\in\mathbb{N}}^{\preccurlyeq} \mathrm{pr}_0(v_i) = x$, womit $x+y \in \Sigma$ bewiesen ist. Die Behauptung ergibt sich nun aus $\Sigma + \Gamma^\perp = (X_0 \oplus \Sigma_1) + \left(X_0 \oplus \Gamma_1^\perp\right) = X_0 \oplus \left(\Sigma_1 + \Gamma_1^\perp\right) = X_0 \oplus \Sigma_1 = \Sigma$.

3.10 Beispiel: Das erste Beispiel zeigt, dass die Mengen $X_0 \subset \Gamma^\perp$ bzw. $\Gamma \subset X_1$ nicht zusammenfallen müssen: Für Reihe $\sum_{i\in\mathbb{N}} v_i$ mit $v_i = (-1)^i \begin{pmatrix} i^{-0,5} \\ i^{-1} \end{pmatrix}$ ist $\sum_{i\in\mathbb{N}} |\langle y, v_i\rangle| = \infty$ u.a. für $y = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, aber der einzige Divergenzpunkt ist $x = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{v_i}{\|v_i\|} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. In diesem Fall ist $X_0 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) : x \in \mathbb{R}\}$, $X_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \end{smallmatrix}\right) : y \in \mathbb{R}\}$, $\Gamma = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ und $\Gamma^\perp = \mathbb{R}^2$. Die Menge der möglichen Summen bzw. Grenzwerte ist $\Sigma = \Sigma + \Gamma^\perp = \mathbb{R}^2$. Auch orthogonal zur linearen Hülle X_0 der Divergenzpunkte können also Divergenzrichtungen liegen, d.h., der Vektorraum Γ der Richtungen absoluter Konvergenz ist i.A. eine echte Teilmenge von X_1.

3.11 Beispiel: Das zweite Beispiel zeigt, dass die Mengen $D_0 \subset D$ bzw. $\Gamma \subset X_1$ nicht zusammenfallen müssen: Für die Reihe $\sum_{i\in\mathbb{N}} v_i$ in $\mathbb{R}^3$ mit $v_i = \frac{(-i)^i}{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind die Divergenzrichtungen identisch mit dem Einheitskreis in der x-y-Ebene: $D = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x^2+y^2 = 1\right\}$. Eine minimale Teilmenge, deren konvexe Hülle den Ursprung enthält, ist z.B. $D_0 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ mit $\mathrm{co}(D_0) = \left\{\begin{pmatrix} 1-2t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : 0 \leq t \leq 1\right\}$ und $X_0 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\right\}$. Das orthogonale Komplement ist $X_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R}\right\}$. Offensichtlich ist aber $\Gamma = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R}\right\}$ und die Menge der möglichen Summen bzw. Grenzwerte ist $\Sigma = \Sigma + \Gamma^\perp = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\right\}$. In diesem Fall gilt also $X_0 = \Gamma^\perp$.

Literatur

[1] T. Banakh, *A simple inductive Proof of Lévy-Steinitz-Theorem* arXiv:1711.04136v1 [math FA] 11 Nov 2017

[2] W. Gross, *Bedingt konvergente Reihen*, Monatsh. Math. Physik **28** (1917) 221-237

[3] I. Halperin, *Sums of series permitting rearrangements*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **8:2** (1986), 87-102

[4] P. Lévy, *Sur les séries semi-convergentes*, Nouv. Ann. d. Math 64 (1905), 506-511

[5] P. Rosenthal, *The remarkable Theorem of Lévy and Steinitz*, The American Mathematical Monthly, Vol. 94, No. 4 (1987), pp. 342-351

[6] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw Hill 1991

[7] E. Steinitz, *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme*, J. f. Math. 143 (1913), 128-175