

# 1.1. Grundbegriffe zur Mechanik

## 1.1.1. Die geradlinig gleichförmige Bewegung

Ein Körper bewegt sich geradlinig und gleichförmig entlang der x-Achse, wenn seine **Geschwindigkeit (velocity)**

$$v_{x0} = \frac{\text{Strecke}}{\text{Zeitabschnitt}} = \frac{\text{Ortsänderung}}{\text{Zeitänderung}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

konstant bleibt.

Geschwindigkeiten werden in der **SI-Einheit**  $[v] = \frac{m}{s}$  oder auch in

$$\frac{km}{h} = \frac{1000 m}{3600 s} = \frac{1}{3,6} \frac{m}{s} \text{ angegeben.}$$

Die **Geschwindigkeits-Zeit-Gleichung** lautet  $v_x(t) = v_{x0}$  und das **Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm** zeigt eine waagrechte Gerade.

Die zurückgelegte **Strecke**  $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$  ist dann **proportional** zum benötigten **Zeitabschnitt**  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Man kann sie als **Flächeninhalt**  $\Delta x = v_x \cdot \Delta t$  im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ablesen.

Umgekehrt kann man die Geschwindigkeit als **Steigung**  $v_{x0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  aus dem Ort-Zeit-Diagramm ablesen.

Mit  $t_1 = 0$  und dem **Startort**  $x_0 = x(0)$  erhält man die **Ort-Zeit-Gleichung**  $x(t) = v_{x0} \cdot t + x_0$  und das **Ort-Zeit-Diagramm** zeigt eine Gerade mit **Startwert**  $x_0$  und **Steigung**  $v_{x0}$ .

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 1 - 4

## 1.1.2. Mittlere und momentane Geschwindigkeit

Bewegt sich ein Körper mit **veränderlicher Geschwindigkeit**, so ist die **mittlere Geschwindigkeit im Zeitabschnitt**  $[t_1; t_2]$  gleich der Steigung der **Sekanten** durch die Punkte  $(t_1 | x(t_1))$  und  $(t_2 | x(t_2))$  im Ort-Zeit-Diagramm:

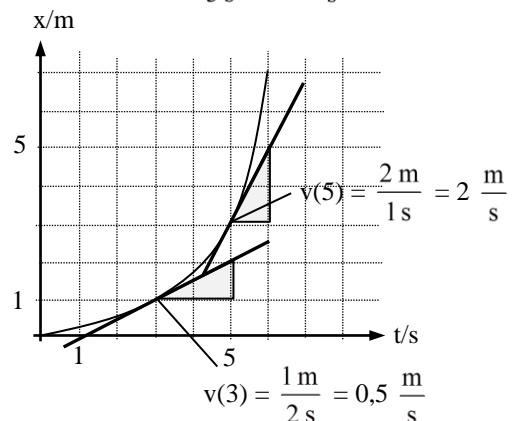
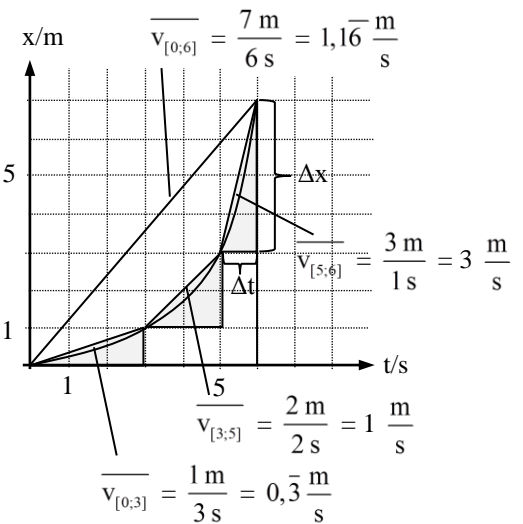
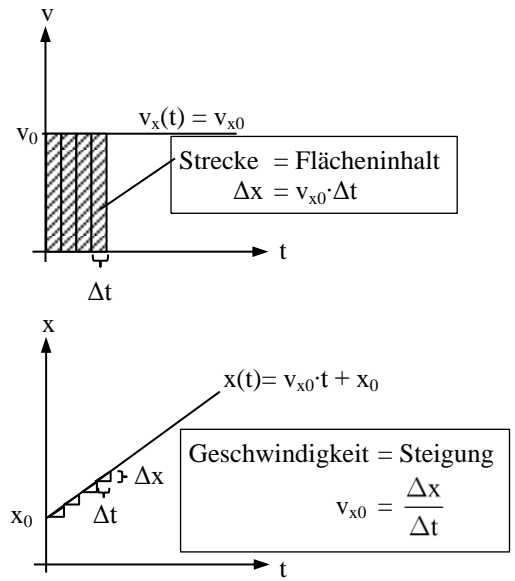
$$\overline{v}_{[t_1; t_2]} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Möchte man die **momentane Geschwindigkeit in einem Zeitpunkt**  $t$  bestimmen, so muss man den Abstand  $\Delta t$  der beiden Punkte immer weiter verringern, bis sie schließlich aufeinander liegen. Anstelle des Buchstaben  $\Delta$  verwendet man für unmessbar kleine Differenzen ein  $d$  und schreibt

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

Solche unmessbar kleinen Differenzen heißen **Differentiale** und sind die Grundlage der **Differentialrechnung**. Graphisch erhält man die momentane Geschwindigkeit aus dem Ort-Zeit-Diagramm als Steigung der **Tangente**.

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 5



### 1.1.3. Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Ein Körper bewegt sich gleichmäßig beschleunigt entlang der x-Achse, wenn seine **Beschleunigung (acceleration)**  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$  konstant bleibt.

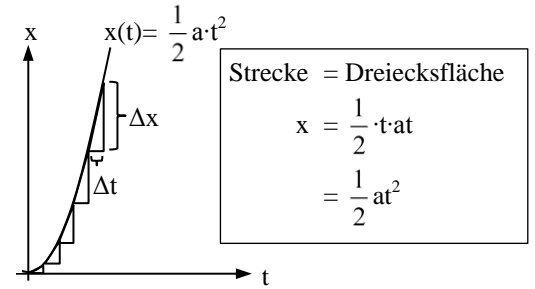
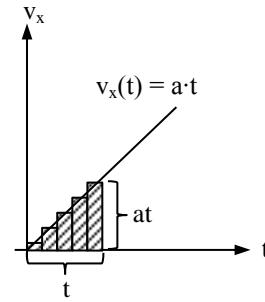
Die **SI-Einheit** der Beschleunigung ist  $[a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

Die **Geschwindigkeits-Zeit-Gleichung** lautet  $v_x(t) = a \cdot t$  und das **Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm** zeigt eine Gerade mit der **Steigung** a.

Die **insgesamt** zurückgelegte **Strecke** kann man als **Dreiecksfläche**

$x = \frac{1}{2} \cdot t \cdot at = \frac{1}{2} a \cdot t^2$  im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ablesen.

Man erhält die **Ort-Zeit-Gleichung**  $x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2$  und das **Ort-Zeit-Diagramm** zeigt eine **Parabel**.



Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 6

### 1.1.4. Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme zusammengesetzter Bewegungen

**Beispiel:** Das Einparken eines Autos lässt sich im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm verfolgen:

$0 \leq t \leq 4$  s: Konstante Geschwindigkeit vorwärts:

$$v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$4 \leq t \leq 7$  s: Gleichmäßige Verzögerung:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-5 \text{ m/s}}{3 \text{ s}} = -1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$7 \leq t \leq 9$  s: Auto steht

$$v = 0$$

$9 \leq t \leq 11$  s: Gleichmäßige Beschleunigung rückwärts:

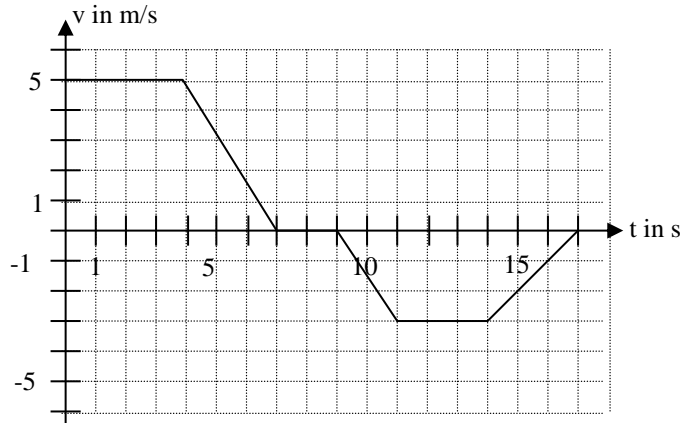
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-3 \text{ m/s}}{2 \text{ s}} = -1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$11 \leq t \leq 14$  s: Konstante Geschwindigkeit rückwärts:

$$v = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

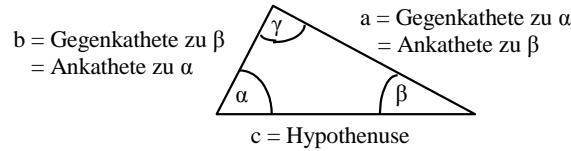
$14 \leq t \leq 17$  s: Gleichmäßige Verzögerung

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3 \text{ m/s}}{3 \text{ s}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 7

### 1.1.5. Trigonometrie



Nach dem **Winkelsummensatz** ist in beliebigen Dreiecken  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , im **rechtwinkligen Dreieck** gilt wegen  $\gamma = 90^\circ$  daher  $\alpha + \beta = 90^\circ$

Nach dem **Strahlensatz** sind rechtwinklige Dreiecke **ähnlich** (haben also gleiche **Seitenverhältnisse**), wenn sie in **einem weiteren Winkel** ( $\alpha$  oder  $\beta$ ) übereinstimmen. Die folgenden Definitionen der **trigonometrischen Funktionen als Seitenverhältnisse** sind also eindeutig:

<b>Sinus:</b> $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \cos(\beta)$	<b>Kosinus:</b> $\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \sin(\beta)$	<b>Tangens:</b> $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{1}{\tan(\beta)}$
--	--	--

Um nun mit Hilfe der im Taschenrechner gespeicherten Winkelfunktionen alle Seiten und Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes zu berechnen, genügt die Angabe einer Seite und einer weiteren Größe (Seite oder Winkel).

#### Beispiel 1

Gegeben sind  $a = 4 \text{ cm}$  und  $\alpha = 40^\circ$ . Berechne die restlichen Größen  $b$ ,  $c$  und  $\beta$ .

#### Lösung

**Winkelsumme:**  $\beta = 90^\circ - \alpha = 50^\circ$

**Sinus:**  $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow c = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{4 \text{ cm}}{\sin(40^\circ)} \approx \underline{6,22 \text{ cm}}$

**Pythagoras:**  $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \approx \underline{5,22 \text{ cm}}$

#### Beispiel 2

Gegeben sind  $a = 5 \text{ cm}$  und  $c = 8 \text{ cm}$ . Berechne die restlichen Größen  $b$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ .

#### Lösung

**Sinus:**  $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{5}{8}\right) \approx \underline{38,7^\circ}$

**Winkelsumme:**  $\beta = 90^\circ - \alpha = \underline{51,3^\circ}$

**Pythagoras:**  $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = \underline{\sqrt{89} \text{ cm}}$

Übungen. Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 8

### 1.1.6. Vektoren

#### Beispiel

Um die Wirkung einer **Kraft** zu bestimmen, benötigt man nicht nur ihren **Betrag** (die Länge des Pfeils), sondern auch ihre **Richtung**:

**Vektoren** beschreiben solche gerichtete Größen in der

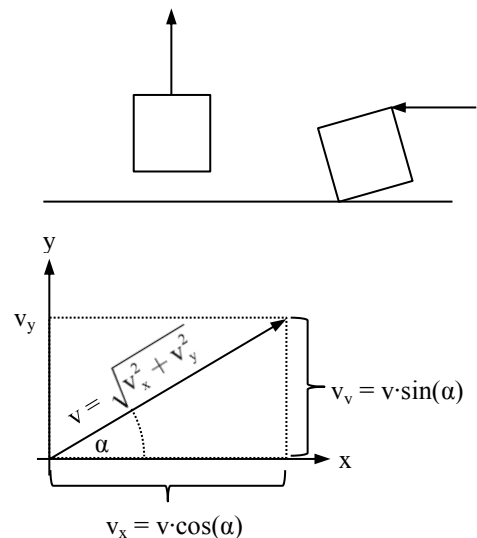
#### 1. Koordinatenform mit

x-Koordinate  $v_x = v \cdot \cos(\alpha)$  und y-Koordinate  $v_y = v \cdot \sin(\alpha)$

in der Vektorschreibweise  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

#### 2. Polarform mit

**Betrag**  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  und **Winkel**  $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$  zur x-Achse



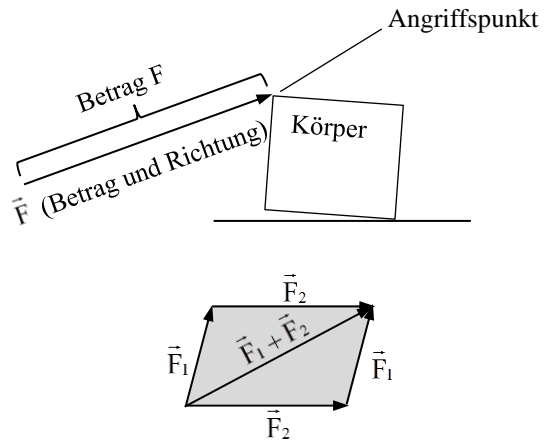
Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 9

### 1.1.7. Kräfte

Kräfte bewirken **Verformungen** und **Bewegungsänderungen**. Die Wirkung einer Kraft wird bestimmt durch

- Angriffspunkt
- Richtung
- Betrag

Solche gerichtete Größen nennt man **Vektoren** (lat. *vehere* = bewegen, vgl. Vehikel) und stellt sie mit **Pfeilen** dar. Der **Betrag F** einer **Kraft  $\vec{F}$**  (engl *force* = Kraft) entspricht der **Länge** des Kraftpfeils. Sie wird mit einem **Federkraftmesser** bestimmt und in **Newton N** (nach *Isaac Newton 1743 - 1727*) angegeben. Wirken zwei Kräfte auf einen Angriffspunkt, so lassen sie sich durch Hintereinanderlegen der Pfeile zu einer **resultierenden Kraft** addieren. (**Vektoraddition**). Umgekehrt lässt sich ein Kraftpfeil in zwei **Komponenten** zerlegen, deren Summe wieder den ursprünglichen Kraftpfeil ergibt. Die beiden Komponenten bilden die Seiten und die Resultierende die Diagonale des **Kräfteparallelogramms**. Sehr häufig zerlegt man Kräfte in **rechtwinklige** Komponenten, deren Beträge dann mit **trigonometrischen Funktionen** und dem **Satz des Pythagoras** bestimmt werden können.

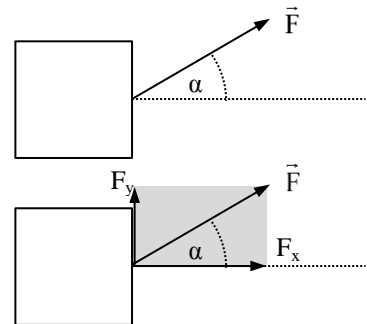


#### Beispiel 1: Kräftezerlegung

Bestimme die horizontale Komponente  $F_x$  und die vertikale Komponente  $F_y$  der Zugkraft  $\vec{F} = 100 \text{ N}$ , welche im Winkel von  $\alpha = 30^\circ$  zur Horizontalen an der Kiste angreift.

#### Lösung:

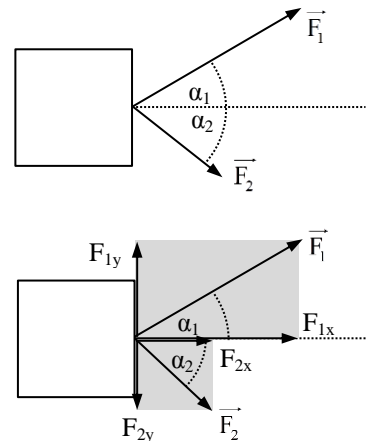
$$F_x = \cos(\alpha) \cdot F \approx 86,6 \text{ N} \text{ und } F_y = \sin(\alpha) \cdot F = 50 \text{ N}.$$



#### Beispiel 2: Resultierende

Zwei Kräfte  $F_1 = 200 \text{ N}$  und  $F_2 = 120 \text{ N}$  greifen unter den Winkeln  $\alpha_1 = 30^\circ$  und  $\alpha_2 = -45^\circ$  zur Horizontalen an der Kiste an.

- Bestimme den Betrag der resultierenden Kraft  $F$  und ihren Winkel  $\alpha$  zur Horizontalen.
- Wie muss der Betrag von  $F_2$  geändert werden, damit die Vertikalkomponente verschwindet?



#### Lösung:

$$\text{a) Horizontal: } F_x = F_{1x} + F_{2x} = \cos(\alpha_1) \cdot F_1 + \cos(\alpha_2) \cdot F_2 \approx 258,1 \text{ N}$$

$$\text{Vertikal: } F_y = F_{1y} + F_{2y} = \sin(\alpha_1) \cdot F_1 + \sin(\alpha_2) \cdot F_2 \approx 15,1 \text{ N}$$

$$\text{Winkel zur Horizontalen } \alpha = \tan^{-1} \left( \frac{F_y}{F_x} \right) \approx 3,35^\circ$$

$$\text{b) Vertikale Komponente: } F_y = F_{1y} + F_{2y} = \sin(\alpha_1) \cdot F_1 + \sin(\alpha_2) \cdot F_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow F_2 = F_1 \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} \approx 141,1 \text{ N}.$$

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 10 - 13

### 1.1.8. Die Gravitationskraft

Die Erde zieht einen Körper mit der Masse  $m$  an ihrer Oberfläche mit der **Gravitationskraft** (oder **Gewichtskraft**)  $F_G = m \cdot g$  an sich. Der Faktor  $g \approx 10 \text{ N/kg}$  ist die **Gravitationsfeldstärke** der Erde an ihrer Oberfläche. Ein Körper der Masse  $m = 1 \text{ kg}$  wird also mit der Gravitationskraft  $F_G = 1 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 10 \text{ N}$  zur Erde hin gezogen bzw. drückt mit  $10 \text{ N}$  auf die Waage. Mit zunehmender Höhe bzw. Abstand zur Erde wird die Gravitationsfeldstärke immer kleiner.

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 14 - 15

## 1.1.9. Die Newtonschen Axiome

[esacast professor pavia on the law of inertia](#)

### 1. Newtonsches Axiom (Trägheitssatz)

Ist die Summe aller Kräfte auf **einen** Körper Null, so bleibt er in Ruhe oder im Zustand der gleichförmigen Bewegung

[esacast professor pavia on force, mass and acceleration](#)

### 2. Newtonsches Axiom (Masse und Beschleunigung)

Ist  $\vec{F}$  die Summe aller Kräfte auf **einen** Körper der Masse  $m$ , so ändert er seine Bewegung mit der Beschleunigung  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ .

[esacast professor pavia on action and reaction](#)

### 3. Newtonsches Axiom (actio = reactio)

Wenn ein Körper A auf einen Körper B die Kraft  $\vec{F}_A$  ausübt, so übt B auf A die entgegengesetzt gleiche Kraft  $\vec{F}_B = -\vec{F}_A$  aus.

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 16 - 19

## 1.1.10. Arbeit, Energie, Leistung

### 1.1.10.1. Die goldene Regel der Mechanik und die Arbeit

Bei allen mechanischen Kraftwandlern wie z.B. der schiefen Ebene, dem Hebel, einem Flaschenzug oder einem Getriebe bleibt das Produkt aus dem zurückgelegten **Weg  $\Delta x$**  und der aufgewandten **Kraft  $F$  in Wegerichtung** gleich: Je kleiner die Kraft, desto länger der Weg. Man nennt dieses Produkt die **Arbeit (Work)**  $\boxed{W = F \cdot \Delta x}$  mit der Einheit **Joule**  $J = N \cdot m$ .

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 20 - 22

### 1.1.10.2. Energie

Die zugeführte Arbeit kann in den verschiedensten Formen als z.B. Wärme-, Lage-, Bewegungs-, Feder-, elektrische oder chemische Energie in einem Körper gespeichert werden: **Arbeit = Änderung der Energie:**  $\boxed{W = \Delta E}$ .

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 23

### 1.1.10.3. Leistung

**Leistung (Power)** ist Arbeit pro Zeit:  $\boxed{P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}}$  mit der Einheit **Watt**  $W = \frac{J}{s}$

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 24

### 1.1.10.4. Einheiten

- Eine Kalorie** mit  $1 \text{ cal} \approx 4,2 \text{ J}$  ist die Energie, die man benötigt, um ein Gramm Wasser um ein Grad Celsius zu erwärmen.
- Eine Kilowattstunde**  $KWh = 3\,600\,000 \text{ J}$  ist die Energie, die man bezahlen muss, wenn man eine Stunde lang eine (elektrische) Leistung von 1 Kilowatt vom Elektrizitätswerk bezogen hat.
- Eine Pferdestärke** (Horsepower Hp) mit  $1 \text{ PS} \approx 750 \text{ W}$  ist ungefähr die Leistung, die ein Zugpferd vor einem beladenen Wagen **auf Dauer** erbringen kann. Die kurzzeitige Leistungsfähigkeit von Pferden ist viel höher.

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 25

### 1.1.10.5. Die potentielle Energie

Die **potentielle** oder **Lageenergie** eines Körpers der Masse  $m$ , der gegen die Gravitationskraft  $F_g = m \cdot g$  um die Höhe  $\Delta x = h$  angehoben wurde, ist  $\boxed{E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h}$ .

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 26

### 1.1.10.6. Die kinetische Energie

Die **kinetische** oder **Bewegungsenergie** eines Körpers der Masse  $m$ , der mit der konstanten Kraft  $F = m \cdot a$  auf die Geschwindigkeit  $v = a \cdot t$  beschleunigt wurde, und dabei der Weg  $\Delta x = \frac{1}{2} a t^2$  zurücklegte, ist  $\boxed{E_{\text{kin}} = F \cdot \Delta x = m \cdot a \cdot \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} m v^2}$ .

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 27 - 28