1.1. Grundbegriffe zur Mechanik

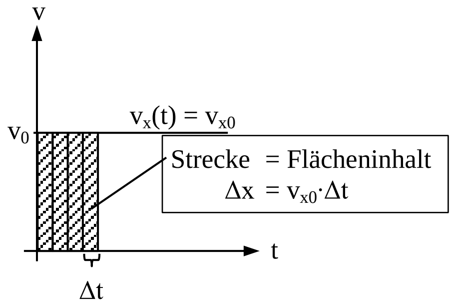
1.1.1. Die geradlinig gleichförmige Bewegung

Ein Körper bewegt sich geradlinig und gleichförmig entlang der x-Achse,

wenn seine **Geschwindigkeit (velocity)**

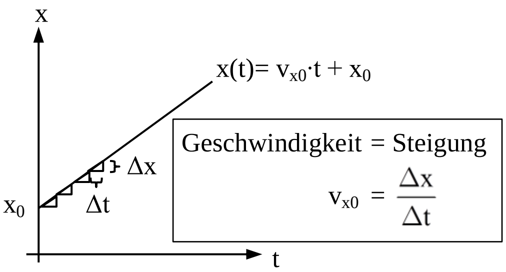
$$\boxed{v_{x0} = \frac{\text{Strecke}}{\text{Zeitabschnitt}} = \frac{\text{Ortsänderung}}{\text{Zeitänderung}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

konstant bleibt.



Geschwindigkeiten werden in der **SI-Einheit** $[v] = \frac{m}{s}$ oder auch in

$\frac{km}{h} = \frac{1000\ m}{3600\ s} = \frac{1}{3{,}6}\ \frac{m}{s}$ angegeben.



Die **Geschwindigkeits-Zeit-Gleichung** lautet $v_x(t) = v_{x0}$ und das **Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm** zeigt eine waagrechte Gerade.

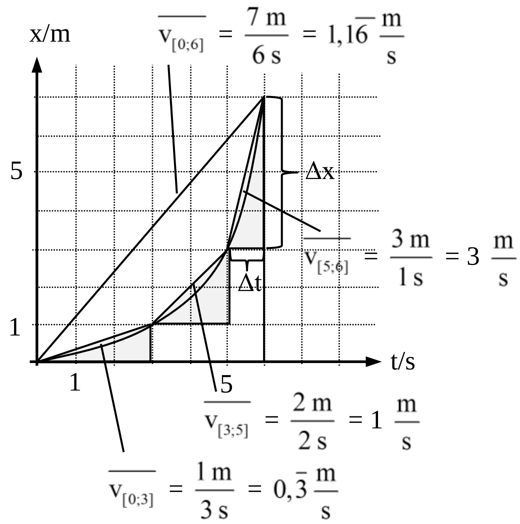
Die zurückgelegte **Strecke** $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ ist dann **proportional** zum benötigten **Zeitabschnitt** $\Delta t = t_2 - t_1$.
Man kann sie als **Flächeninhalt** $\Delta x = v_x \cdot \Delta t$ im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ablesen.

Umgekehrt kann man die Geschwindigkeit als **Steigung** $v_{x0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ aus dem Ort-Zeit-Diagramm ablesen.

Mit $t_1 = 0$ und dem **Startort** $x_0 = x(0)$ erhält man die **Ort-Zeit-Gleichung** $x(t) = v_{x0} \cdot t + x_0$ und das **Ort-Zeit-Diagramm** zeigt eine Gerade mit **Startwert** x_0 und **Steigung** v_{x0}.

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 1 - 4

1.1.2. Mittlere und momentane Geschwindigkeit



Bewegt sich ein Körper mit **veränderlicher Geschwindigkeit**, so ist die **mittlere Geschwindigkeit im Zeitabschnitt [t_1; t_2]** gleich der Steigung der **Sekanten** durch die Punkte $(t_1 \mid x(t_1))$ und $(t_2 \mid x(t_2))$ im Ort-Zeit-Diagramm:

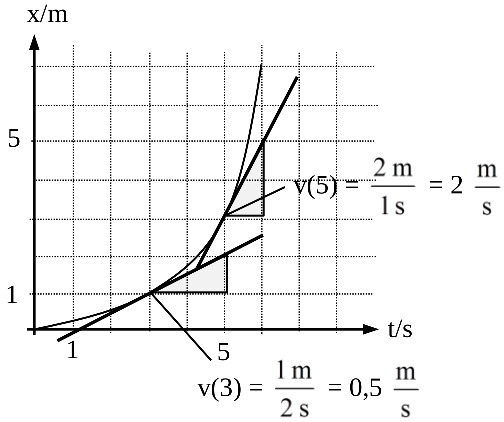
$$\boxed{\overline{v_{[t_1;t_2]}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

Möchte man die **momentane Geschwindigkeit in einem Zeitpunkt** t bestimmen, so muss man den Abstand Δt der beiden Punkte immer weiter verringern, bis sie schließlich aufeinander liegen. Anstelle des Buchstaben Δ verwendet man für unmessbar kleine Differenzen ein d und schreibt

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt}}$$

Solche unmessbar kleinen Differenzen heißen **Differentiale** und sind die Grundlage der **Differentialrechnung**. Graphisch erhält man die momentane Geschwindigkeit aus dem Ort-Zeit-Diagramm als Steigung der **Tangente**.

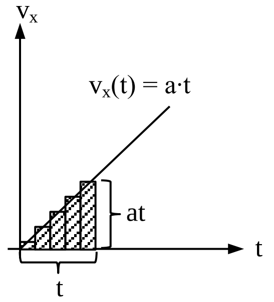
Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 5



1.1.3. Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Ein Körper bewegt sich gleichmäßig beschleunigt entlang der x-Achse, wenn

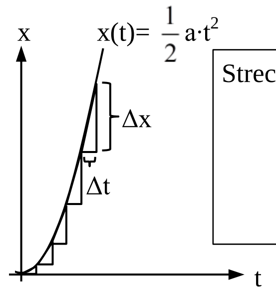
seine **Beschleunigung (acceleration)** $\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}}$ konstant bleibt.



Die **SI-Einheit** der Beschleunigung ist $[a] = \frac{m}{s^2}$.

Die **Geschwindigkeits-Zeit-Gleichung** lautet $v_x(t) = a \cdot t$ und das **Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm** zeigt eine Gerade mit der **Steigung** a.

Die **insgesamt** zurückgelegte **Strecke** kann man als **Dreiecksfläche** $x = \frac{1}{2} \cdot t \cdot at = \frac{1}{2} a \cdot t^2$ im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ablesen.



Strecke = Dreiecksfläche

$$x = \frac{1}{2} \cdot t \cdot at = \frac{1}{2} at^2$$

Man erhält die **Ort-Zeit-Gleichung** $\boxed{x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2}$ und das **Ort-Zeit-Diagramm** zeigt eine **Parabel**.

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 6

1.1.4. Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme zusammengesetzter Bewegungen

Beispiel: Das Einparken eines Autos lässt sich im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm verfolgen:

$0 \le t \le 4$ s: Konstante Geschwindigkeit vorwärts:

$$v = 5 \frac{m}{s}$$

$4 \le t \le 7$ s: Gleichmäßige Verzögerung:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-5\,m/s}{3\,s} = -1{,}\bar{6} \frac{m}{s^2}$$

$7 \le t \le 9$ s: Auto steht

$$v = 0$$

$9 \le t \le 11$ s: Gleichmäßige Beschleunigung rückwärts:

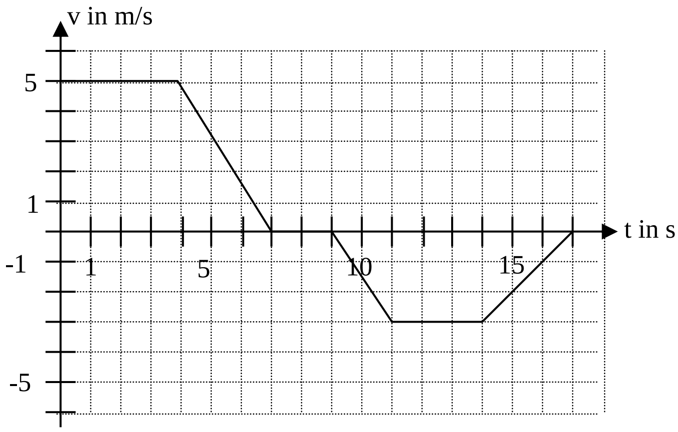
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-3\,m/s}{2\,s} = -1{,}5 \frac{m}{s^2}$$

$11 \le t \le 14$ s: Konstante Geschwindigkeit rückwärts:

$$v = -3 \frac{m}{s}$$

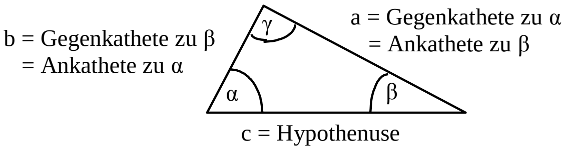
$14 \le t \le 17$ s: Gleichmäßige Verzögerung

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3\,m/s}{3\,s} = 1 \frac{m}{s^2}$$



Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 7

1.1.5. Trigonometrie



Nach dem **Winkelsummensatz** ist in beliebigen Dreiecken $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, im **rechtwinkligen Dreieck** gilt wegen $\gamma = 90°$ daher $\alpha + \beta = 90°$

Nach dem **Strahlensatz** sind rechtwinklige Dreiecke **ähnlich (**haben also gleiche **Seitenverhältnisse)**, wenn sie in **einem weiteren Winkel** (α oder β) übereinstimmen. Die folgenden Definitionen der **trigonometrischen Funktionen als Seitenverhältnisse** sind also eindeutig:

Sinus: $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \cos(\beta)$	**Kosinus**: $\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \sin(\beta)$	**Tangens**: $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{1}{\tan(\beta)}$

Um nun mit Hilfe der im Taschenrechner gespeicherten Winkelfunktionen alle Seiten und Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes zu berechnen, genügt die Angabe einer Seite und einer weiteren Größe (Seite oder Winkel).

Beispiel 1
Gegeben sind a = 4 cm und α = 40°. Berechne die restlichen Größen b, c und β.

Lösung
Winkelsumme: $\underline{\beta} = 90° - \alpha = \underline{50°}$

Sinus: $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \underline{c} = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{4\text{ cm}}{\sin(40°)} \approx \underline{6{,}22\text{ cm}}$

Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \underline{b} = \sqrt{c^2 - a^2} \approx \underline{5{,}22\text{ cm}}$

Beispiel 2
Gegeben sind a = 5 cm und c = 8 cm. Berechne die restlichen Größen b, α und β.

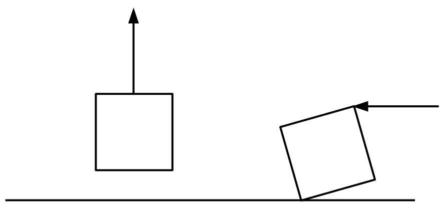
Lösung
Sinus: $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \underline{\alpha} = \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{5}{8}\right) \approx \underline{38{,}7°}$

Winkelsumme: $\underline{\beta} = 90° - \alpha = \underline{51{,}3°}$

Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \underline{c} = \sqrt{a^2 - b^2} = \underline{\sqrt{89}\text{ cm}}$

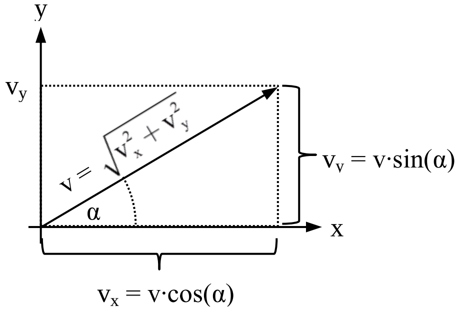
Übungen. Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 8

1.1.6. Vektoren



Beispiel
Um die Wirkung einer **Kraft** zu bestimmen, benötigt man nicht nur ihren **Betrag** (die Länge des Pfeils), sondern auch ihre **Richtung**:

Vektoren beschreiben solche gerichtete Größen in der
1. **Koordinatenform** mit
   x-Koordinate $v_x = v \cdot \sin(\alpha)$ und y-Koordinate $v_y = v \cdot \sin(\alpha)$
   in der Vektorschreibweise $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$
2. **Polarform** mit
   Betrag $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ und **Winkel** $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$ zur x-Achse

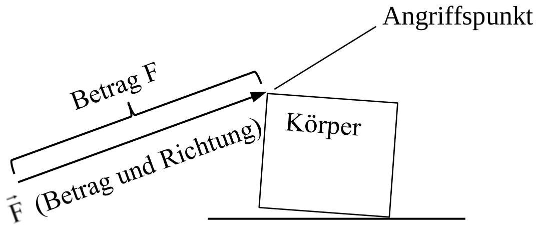


Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 9

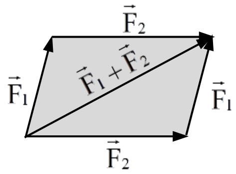
1.1.7. Kräfte

Kräfte bewirken **Verformungen** und **Bewegungsänderungen**. Die Wirkung einer Kraft wird bestimmt durch

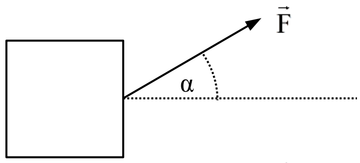
- Angriffspunkt
- Richtung
- Betrag



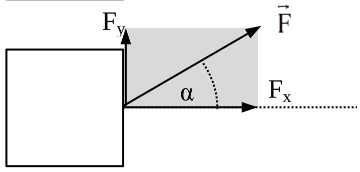
Solche gerichtete Größen nennt man **Vektoren** (lat. *vehere* = *bewegen*, vgl. Vehikel) und stellt sie mit **Pfeilen** dar. Der **Betrag F** einer **Kraft** $\vec{F}$ (*engl force* = *Kraft*) entspricht der **Länge** des Kraftpfeils. Sie wird mit einem **Federkraftmesser** bestimmt und in **Newton N** (nach *Isaac Newton 1743 - 1727*) angegeben. Wirken zwei Kräfte auf einen Angriffspunkt, so lassen sie sich durch Hintereinanderlegen der Pfeile zu einer **resultierenden Kraft** addieren. (**Vektoraddition**). Umgekehrt lässt sich ein Kraftpfeil in zwei **Komponenten** zerlegen, deren Summe wieder den ursprünglichen Kraftpfeil ergibt. Die beiden Komponenten bilden die Seiten und die Resultierende die Diagonale des **Kräfteparallelogramms**. Sehr häufig zerlegt man Kräfte in **rechtwinklige** Komponenten, deren Beträge dann mit **trigonometrischen Funktionen** und dem **Satz des Pythagoras** bestimmt werden können.



Beispiel 1: Kräftezerlegung
Bestimme die horizontale Komponente F_x und die vertikale Komponente F_y der Zugkraft $\vec{F}$ = 100 N, welche im Winkel von α = 30° zur Horizontalen an der Kiste angreift.

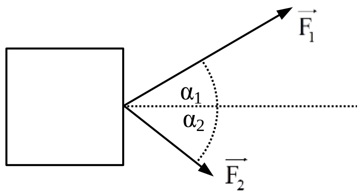


Lösung:
$F_x = \cos(\alpha)\cdot F \approx 86{,}6$ N und $F_y = \sin(\alpha)\cdot F = 50$ N.



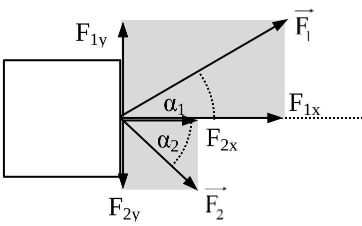
Beispiel 2: Resultierende
Zwei Kräfte F_1 = 200 N und F_2 = 120 N greifen unter den Winkeln α_1 = 30° und α_2 = −45° zur Horizontalen an der Kiste an.

a) Bestimme den Betrag der resultierenden Kraft F und ihren Winkel α zur Horizontalen.
b) Wie muss der Betrag von F_2 geändert werden, damit die Vertikalkomponente verschwindet?



Lösung:

a) Horizontal: $F_x = F_{1x} + F_{2x} = \cos(\alpha_1)\cdot F_1 + \cos(\alpha_2)\cdot F_2 \approx 258{,}1$ N
Vertikal: $F_y = F_{1y} + F_{2y} = \sin(\alpha_1)\cdot F_1 + \sin(\alpha_2)\cdot F_2 \approx 15{,}1$ N
Winkel zur Horizontalen $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right) \approx 3{,}35°$
b) Vertikale Komponente: $F_y = F_{1y} + F_{2y} = \sin(\alpha_1)\cdot F_1 + \sin(\alpha_2)\cdot F_2 = 0$
$\Leftrightarrow F_2 = F_1 \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} \approx 141{,}1$ N.



Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 10 - 13

1.1.8. Die Gravitationskraft

Die Erde zieht einen Körper mit der Masse m an ihrer Oberfläche mit der **Gravitationskraft** (oder **Gewichtskraft**) $\boxed{F_G = m\cdot g}$ an sich. Der Faktor $\boxed{g \approx 10\ \text{N/kg}}$ ist die **Gravitationsfeldstärke** der Erde an ihrer Oberfläche. Ein Körper der Masse m = 1 kg wird also mit der Gravitationskraft $F_G = 1\ \text{kg}\cdot 10\ \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 10$ N zur Erde hin gezogen bzw. drückt mit 10 N auf die Waage. Mit zunehmender Höhe bzw. Abstand zur Erde wird die Gravitationsfeldstärke immer kleiner.

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 14 - 15

1.1.9. Die Newtonschen Axiome

esacast professor pavia on the law of inertia

1. Newtonsches Axiom (Trägheitssatz)
Ist die Summe aller Kräfte auf **einen** Körper Null, so bleibt er in Ruhe oder im Zustand der gleichförmigen Bewegung

esacast professor pavia on force, mass and acceleration

2. Newtonsches Axiom (Masse und Beschleunigung)

Ist $\vec{F}$ die Summe aller Kräfte auf **einen** Körper der Masse m, so ändert er seine Bewegung mit der Beschleunigung $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.

esacast professor pavia on action and reaction

3. Newtonsches Axiom (actio = reactio)
Wenn ein Körper A auf einen Körper B die Kraft $\overrightarrow{F_A}$ ausübt, so übt B auf A die entgegengesetzt gleiche Kraft $\overrightarrow{F_B} = -\overrightarrow{F_A}$ aus.

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 16 - 19

1.1.10. Arbeit, Energie, Leistung

1.1.10.1. Die goldene Regel der Mechanik und die Arbeit
Bei allen mechanischen Kraftwandlern wie z.B. der schiefen Ebene, dem Hebel, einem Flaschenzug oder einem Getriebe bleibt das Produkt aus dem zurückgelegten **Weg Δx** und der aufgewandten **Kraft F in Wegrichtung** gleich: Je kleiner die Kraft, desto länger der Weg. Man nennt dieses Produkt die **Arbeit** (*Work*) $\boxed{W = F\cdot\Delta x}$ mit der Einheit **Joule** J = N·m.

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 20 - 22

1.1.10.2. Energie
Die zugeführte Arbeit kann in den verschiedensten Formen als z.B. Wärme-, Lage-, Bewegungs-, Feder-, elektrische oder chemische Energie in einem Körper gespeichert werden: **Arbeit = Änderung der Energie**: $\boxed{W = \Delta E}$.

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 23

1.1.10.3. Leistung

Leistung (*Power*) ist Arbeit pro Zeit: $\boxed{P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}}$ mit der Einheit **Watt** $W = \frac{J}{s}$

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 24

1.1.10.4. Einheiten
a) **Eine Kalorie** mit 1 cal ≈ 4,2 J ist die Energie, die man benötigt, um ein Gramm Wasser um ein Grad Celsius zu erwärmen.
b) **Eine Kilowattstunde** KWh = 3 600 000 J ist die Energie, die man bezahlen muss, wenn man eine Stunde lang eine (elektrische) Leistung von 1 Watt vom Elektrizitätswerk bezogen hat.
c) **Eine Pferdestärke** (Horsepower Hp) mit 1 PS ≈ 750 W ist ungefähr die Leistung, die ein Zugpferd vor einem beladenen Wagen **auf Dauer** erbringen kann. Die kurzzeitige Leistungsfähigkeit von Pferden ist viel höher.

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 25

1.1.10.5. Die potentielle Energie
Die **potentielle** oder **Lageenergie** eines Körpers der Masse m, der gegen die Gravitationskraft $F_g = m\cdot g$ um die Höhe $\Delta x = h$ angehoben wurde, ist $\boxed{E_{pot} = m\cdot g\cdot h}$.

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 26

1.1.10.6. Die kinetische Energie
Die **kinetische** oder **Bewegungsenergie** eines Körpers der Masse m, der mit der konstanten Kraft $F = m\cdot a$ auf die Geschwindigkeit $v = a\cdot t$ beschleunigt wurde, und dabei der Weg $\Delta x = \frac{1}{2}at^2$ zurücklegte, ist $\boxed{E_{kin} = F\cdot\Delta x = m\cdot a\cdot\frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}mv^2}$.

Übungen: Grundaufgaben zur Mechanik Nr. 27 - 28