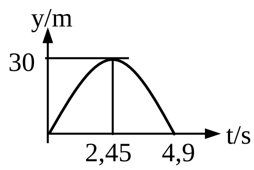
1.2. Prüfungsaufgaben zur Kinematik - Wurfbewegungen

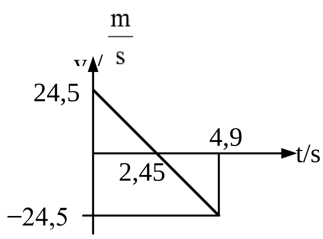
Aufgabe 1: Senkrechter Wurf (10)

a) Wie schnell muss ein Stein senkrecht nach oben geworfen werden, wenn er eine Höhe von 30 m erreichen soll? (6)
b) Wie lange dauert sein Flug? (1)
c) Zeichne jeweils ein beschriftetes y-t- bzw. v_y-t-Diagramm. (2)
d) Mit welcher Geschwindigkeit kommt er wieder auf dem Boden an? (1)

Lösung: (Alles in SI)

a) $v_y(t) = -10t + v_{y0}$. Am höchsten Punkt der Bahn ist $v_y(t_1) = 0 \Rightarrow$ Gipfelzeit $t_1 = 0{,}1v_{y0}$. (2)
$y(t) = -5t^2 + v_{y0}t$. Aus $y(t_1) = 30$ erhält man durch Einsetzen $30 = -0{,}05v_{y0}^2 + 0{,}1v_{y0}^2 = 0{,}05v_{y0}^2$. (3)
Die Abwurfgeschwindigkeit ist $v_{y0} = \sqrt{600}$ m/s ≈ 24,5 m/s (1)
b) Die Flugzeit ist $2t_1 = 0{,}2v_{y0} \approx 4{,}9$ s (1)
c) Beschriftete y-t- und v_y-t-Diagramme (siehe unten) (2)
d) Am v_y-t-Diagramm erkennt man, dass die Aufprallgeschwindigkeit betragsgleich ist mit der Abwurfgeschwindigkeit. (1)



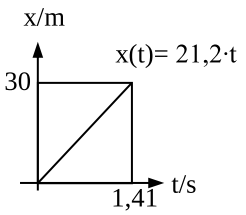


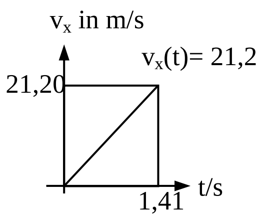
Aufgabe 2: Waagrechter Wurf (15)

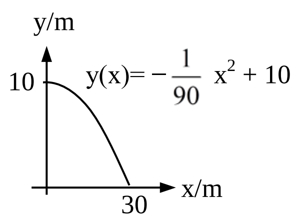
a) Wie lange fliegt ein Stein, der waagrecht aus einer Höhe von 10 m geworfen wird? (2)
b) Wie schnell muss der Stein geworfen werden, wenn er eine Weite von 30 m erreichen soll? (2)
c) Mit welcher Geschwindigkeit kommt er auf dem Boden an? (3)
d) Zeichne die Geschwindigkeits-Zeit und die Ort-Zeit-Diagramme in x und in y-Richtung. (4)
e) Zeichne die Bahnkurve des Steins. (2)

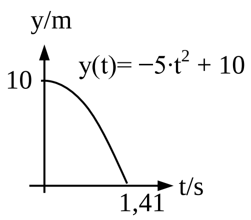
Aufgabe 2: waagrechter Wurf (15): (Alles in SI)

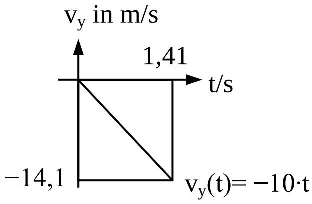
a) $y(t) = -5t^2 + y_0$ (Freier Fall) Aus $y(t_1) = 0$ erhält man durch Einsetzen die Fallzeit $t_0 = \sqrt{2}$ s ≈ 1,41 s. (2)
b) $x(t) = v_{x0}\cdot t$. Aus $x(t_0) = 30$ erhält man die Abwurfgeschwindigkeit $v_{x0} = 15\sqrt{2}$ m/s ≈ 21,21 m/s (2)
c) $v_x(t) = v_{x0}$ und $v_y(t) = -10t$. Beim Aufprall ist $v_x(t_0) = 15\sqrt{2}$ m/s und $v_y(t_0) = -10\sqrt{2}$ m/s (2)
Die Gesamtgeschwindigkeit ist $v(t_0) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{650} = 5\sqrt{26}$ m/s ≈ 25,50 m/s (1)
d) Beschriftete Diagramme (6)
e) Bahnkurve (Nicht verlangt: Durch Einsetzen von $t = \frac{x}{v_{x0}} = \frac{x}{15\sqrt{2}}$ in $y(t) = -5t^2 + 10$ erhält man $y(x) = -\frac{1}{90}x^2 + 10$) (2)











Aufgabe 3a: Schiefer Wurf (10)
Ein Tennisball wird im Winkel von 30° zur Horizontalen mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 20 m/s abgeworfen. Zeichne die Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme in x- und y-Richtung und bestimme die Wurfdauer, die Wurfhöhe und die Wurfweite mit Hilfe dieser Diagramme. Überprüfe die Wurfhöhe mit Hilfe einer Energiebetrachtung.

Lösungen (10)

$v_x(t) = \cos(\alpha)\cdot v_0 = 10\sqrt{3}\ \frac{m}{s} \approx 17{,}3\ \frac{m}{s}$ (1)

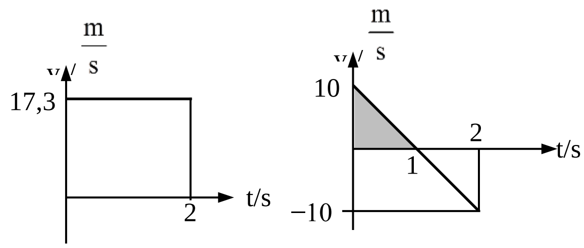
$v_y(t) = -g\cdot t + \sin(\alpha)\cdot v_0 = -10\ \frac{m}{s^2}\cdot t + 10\ \frac{m}{s}$ (1)

$\Rightarrow$ Wurfdauer $t_1 = 2$ s (1)

$\Rightarrow$ Wurfweite $x(t_1) = v_{x0}\cdot t_1 = 20\sqrt{3}$ m $\approx 34{,}6$ m (1)

$\Rightarrow$ Wurfhöhe $y_{1/2} = y(\frac{t_1}{2}) = \frac{1}{2}\cdot v_{y0}\cdot \frac{t_1}{2} = 5$ m (1)

(Flächeninhalt im v_y-t-Diagramm)



Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme (2)

Energieerhaltung: $E_{kin} = E_{kin}‘ + E_{pot}‘ \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_{x0}^2 + \frac{1}{2}mv_{y0}^2 = mg\,y_{1/2} + \frac{1}{2}mv_{y0}^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}v_{y0}^2 = g\,y_{1/2} \Rightarrow y_{1/2} = \frac{v_{y0}^2}{2g} = 5$ m (3)

Aufgabe 3b: Schiefer Wurf (10)
Ein Tennisball wird im Winkel von 30° zur Horizontalen mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 20 m/s abgeworfen. Zeichne die Ort-Zeit-Diagramme in x- und y-Richtung und bestimme die Wurfdauer, die Wurfhöhe und die Wurfweite mit Hilfe dieser Diagramme. Überprüfe die Wurfhöhe mit Hilfe einer Energiebetrachtung

Lösungen: Alles in SI! (10)

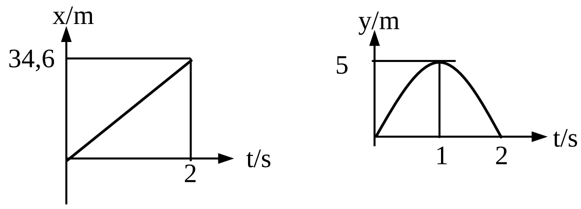
$x(t) = \cos(\alpha)\cdot v_0\cdot t = 10\sqrt{3}\cdot t \approx 17{,}3\cdot t$ (1)

$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \sin(\alpha)\cdot v_0\cdot t = -5\cdot t^2 + 10\cdot t = -5t(1-2t)$ (1)

$\Rightarrow$ Wurfdauer t = 2 s (1)

$\Rightarrow$ Wurfweite $s = v_x\cdot t = 20\sqrt{3}$ m $\approx 34{,}6$ m (1)

$\Rightarrow$ Wurfhöhe y(1 s) = 5 m (1)



Ort-Zeit-Diagramme (2)

Energieerhaltung: $E_{kin} = E_{kin}‘ + E_{pot}‘ \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_{x0}^2 + \frac{1}{2}mv_{y0}^2 = mg\,y_{1/2} + \frac{1}{2}mv_{y0}^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}v_{y0}^2 = g\,y_{1/2} \Rightarrow y_{1/2} = \frac{v_{y0}^2}{2g} = 5$ m (3)

Aufgabe 3c: Schiefer Wurf (14)
Ein Tennisball wird im Winkel von 30° zur Horizontalen mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 20 m/s aus einer Höhe von 5 m abgeworfen.

a) Formuliere die Gleichungen für die Geschwindigkeiten $v_x(t)$ und $v_y(t)$ und skizziere ihren Verlauf. (4)
b) Formuliere die Gleichungen für die Ortskoordinaten x(t) und y(t) und skizziere ihren Verlauf. (4)
c) Bestimme die Wurfdauer, die Wurfhöhe und die Wurfweite. (4)
d) Formuliere die Gleichung für die Bahnkurve y(x) und skizziere ihren Verlauf. (2)

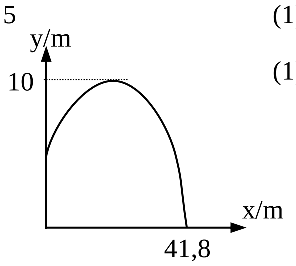
Lösungen (alles in SI) (14)

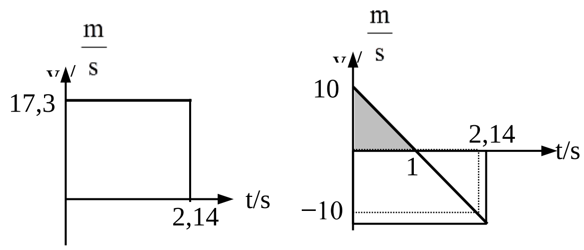
a) $v_x(t) = \cos(\alpha)\cdot v_0 = 10\sqrt{3} \approx 17{,}3$ (1)
$v_y(t) = -g\cdot t + \sin(\alpha)\cdot v_0 = -10\cdot t + 10$ (1)

b) $x(t) = \cos(\alpha)\cdot v_0\cdot t = 10\sqrt{3}\cdot t \approx 17{,}3\cdot t$ (1)
$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \sin(\alpha)\cdot v_0\cdot t + y_0 = -5(t^2 - 2t - 1)$ (1)

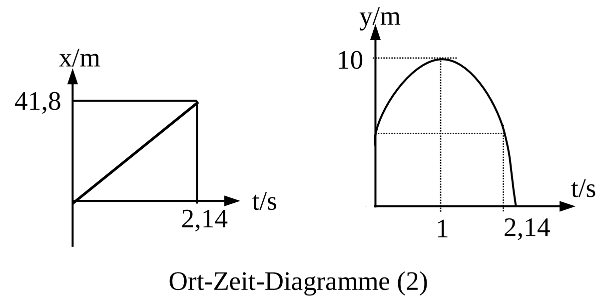
c) $y(t) = 0 \Rightarrow$ Wurfdauer $t_1 = 1 + \sqrt{2}$ s $\approx 2{,}14$ s (2)
$\Rightarrow$ Wurfweite $x(t_1) = v_{x0}\cdot t_1 \approx 41{,}8$ m (1)
Scheitelpunkt S(1|10) $\Rightarrow$ Wurfhöhe y(1) = 10 m (1)

d) Bahnkurve $y(x) = -\frac{t^2}{60} + \frac{t}{\sqrt{3}} + 5$ (1)
Skizze der Bahnkurve (1)





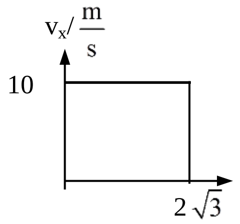
Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme (2)

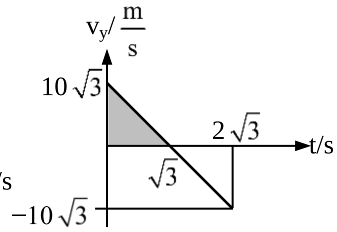


Ort-Zeit-Diagramme (2)

Aufgabe 4a: Schiefer Wurf
Ein Tennisball wird im Winkel von 60° zur Horizontalen mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 20 m/s abgeworfen. Zeichne die Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme in x- und y-Richtung und bestimme die Wurfdauer, die Wurfhöhe und die Wurfweite mit Hilfe dieser Diagramme.

Aufgabe 4a: Schiefer Wurf –alles in SI-





$v_x(t) = \cos(\alpha)\cdot v_0 = 10$

$v_y(t) = -g\cdot t + \sin(\alpha)\cdot v_0 = -10\,t + 10\sqrt{3}$

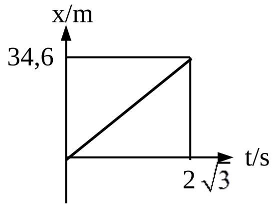
Wurfdauer $t_1 = 2\sqrt{3}$ s

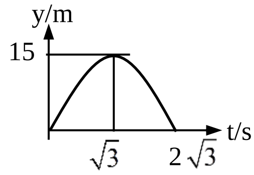
Wurfweite $x(t_1) = v_{x0}\cdot t_1 = 20\sqrt{3}$ m $\approx 34{,}6$ m

Wurfhöhe $y_{1/2} = y(\frac{t_1}{2}) = \frac{1}{2}\cdot v_{y0}\cdot \frac{t_1}{2} = 15$ m (Flächeninhalt im v_y-t-Diagramm)

Aufgabe 4b: Schiefer Wurf
Ein Tennisball wird im Winkel von 60° zur Horizontalen mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 20 m/s abgeworfen. Skizziere die Ort-Zeit-Diagramme in x- und y-Richtung und bestimme die Wurfdauer, die Wurfhöhe und die Wurfweite mit Hilfe dieser Diagramme.

Aufgabe 4b: Schiefer Wurf -alles in SI-





$x(t) = \cos(\alpha)\cdot v_0\cdot t = 10\cdot t$

$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \sin(\alpha)\cdot v_0\cdot t = -5\cdot t^2 + 10\sqrt{3}\cdot t = 5t(2\sqrt{3} - t)$

Wurfdauer $t = 2\sqrt{3}$ s

Wurfweite $s = v_x\cdot t = 20\sqrt{3}$ m $\approx 34{,}6$ m

Wurfhöhe $y(\sqrt{3}) = 15$ m

Aufgabe 5: Schiefer Wurf (20)
Vom 17. bis zum 19. Jahrhundert wurden Schlachten durch Artillerie entschieden und die besten Mathematiker wie z.B. Napoléon Bonaparte sammelten sich an den Artillerieschulen der Armee, um Probleme wie das folgende zu lösen:

a) Formuliere die Gleichungen für die x-Koordinate $v_x(t)$ und die y-Koordinate $v_y(t)$ der Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}$ des Geschosses zur Zeit t in Abhängigkeit von der Mündungsgeschwindigkeit v_0 und dem Höhenrichtwinkel α. (2)

b) Formuliere die Gleichungen für die x-Koordinate x(t) und die y-Koordinate y(t) des Ortes $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ des Geschosses zur Zeit t in Abhängigkeit von der Abschusshöhe y_0, der Mündungsgeschwindigkeit v_0 und dem Höhenrichtwinkel α. (2)

c) Eliminiere die Zeit t aus den beiden Gleichungen für die Ortskoordinaten aus a) und formuliere die Gleichung der Bahnkurve y(x) im Fall von $y_0 = 0$. (2)

d) Welchen Richtwinkel α benötigt man bei einer Mündungsgeschwindigkeit von 800 m/s für eine Schussweite von 20 km, wenn der (beträchtliche) Luftwiderstand unberücksichtigt bleibt? Verwende die Beziehung $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$. (2)

e) Wie lange dauert der Flug? (2)

f) Welche Höhe erreicht das Geschoss? (1)

g) Skizziere die v_x-t- und v_y-t-Diagramme (Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme) mit den Angaben aus d) – f) (2)

h) Skizziere die x-t- und y-t-Diagramme (Weg-Zeit-Diagramme) mit den Angaben aus d) – f) (2)

i) Skizziere das y-x-Diagramm (Bahnkurve) mit den Angaben aus d) – f) (1)

j) Die eigentliche Herausforderung bestand bis zum 20 Jahrhundert in der Berücksichtigung des Luftwiderstandes. Ein Körper mit der Geschwindigkeit v, der Querschnittsfläche A und dem Formfaktor c_w erfährt bei turbulenter Strömung in einem Medium der Dichte ρ die Widerstandskraft $F = \frac{c_w}{2}\cdot\rho\cdot A\cdot v^2$. Um welchen Faktor ändert sich der Luftwiderstand bei einer Verdopplung der Geschwindigkeit? (1)

k) Warum lässt sich die Geschossbahn mit dem Schema $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$ nicht mehr berechnen? (1)

l) Skizziere den geschätzten wahren Verlauf der Geschossbahn in das Diagramm aus g) – i) (2)

Lösungen

a) Vertikalkomponente der Geschwindigkeit: $v_y(t) = -gt + \sin(\alpha)\cdot v_0$. (1)

Horizontalkomponente der Geschwindigkeit: $v_x(t) = \cos(\alpha)\cdot v_0$. (1)

b) Vertikalkomponente des Ortes mit $y_0 = 0$: $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \sin(\alpha)\cdot v_0\cdot t$ (1)

Horizontalkomponente des Ortes mit $x_0 = 0$: $x(t) = \cos(\alpha)\cdot v_0\cdot t \Leftrightarrow t = \frac{x}{\cos(\alpha)\cdot v_0}$. (1)

c) Einsetzen ergibt $y(x) = -\frac{g}{2\cdot(\cos(\alpha))^2\cdot v_0^2}\cdot x^2 + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot x = \frac{x}{\cos(\alpha)}\cdot\left(-\frac{g\cdot x}{2\cos(\alpha)\cdot v_0^2}+\sin(\alpha)\right)$. (2)

d) Die Klammer verschwindet für $x = \frac{2v_0^2}{g}\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) = \frac{v_0^2}{g}\cdot\sin(2\alpha)$. (1)

Durch Einsetzen erhält man in SI-Einheiten $20\,000 = \frac{(800)^2}{10}\cdot\sin(2\alpha) \Leftrightarrow \frac{5}{16} = \sin(2\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{5}{16}\right) \approx 9{,}1°$. (1)

e) Aus der Vertikalkomponente der Geschwindigkeit $v_y(t) = -gt + \sin(\alpha)\cdot v_0$ ergibt sich die halbe Flugdauer für $v_y(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sin(\alpha)\cdot v_0}{g} \approx \sin(9{,}1°)\cdot 80$ s ≈ 12,7 s und die gesamte Flugdauer als 25,4 s. (2)

f) Die Höhe ist $y\left(\frac{\sin(\alpha)\cdot v_0}{g}\right) = \frac{2}{2g}(\sin(\alpha)\cdot v_0)^2 \approx 800$ m. (1)

g) Beschriftete Skizze von $v_x(t)$ (1)
Beschriftete Skizze von $v_y(t)$ (1)

h) Beschriftete Skizze von $x(t)$ (1)
Beschriftete Skizze von $y(t)$ (1)

i) Beschriftete Skizze von $y(x)$ (1)

j) Verdoppelt sich v, so vervierfacht sich F. (1)

k) Die Bewegung ist nicht mehr gleichmäßig beschleunigt, da die Verzögerung von der Geschwindigkeit abhängt. (1)

l) Korrekturen (2)