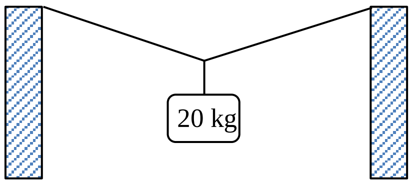
1.3. Prüfungsaufgaben zur Statik

Aufgabe 1a: Kräftezerlegung (3)
Eine 20 kg schwere Lampe ist in der Mitte eines 6 m breiten Durchganges an einem Seil aufgehängt, welches dort 1 m durchhängt. Wie groß sind die Seilkräfte?

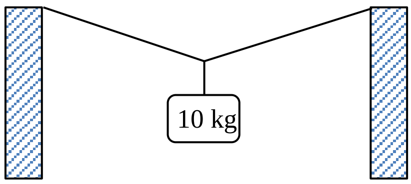


Lösung:

Neigungswinkel zur Horizontalen $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 18{,}43°$. (1)

Kräftezerlegung $F_g = 2\cdot\sin(\alpha)\cdot F_s \Rightarrow F_s = \frac{F_g}{2\cdot\sin(\alpha)} \approx 316{,}2$ N (2)

Aufgabe 1b: Kräftezerlegung (3)
Eine 10 kg schwere Lampe ist in der Mitte eines 8 m breiten Durchganges an einem Seil aufgehängt, welches dort 1 m durchhängt. Wie groß sind die Seilkräfte?

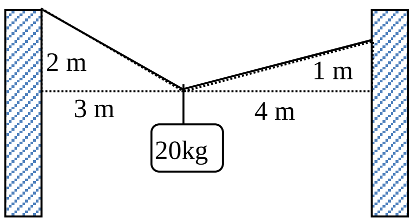


Lösung:

Neigungswinkel zur Horizontalen $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 14{,}0°$. (1)

Kräftezerlegung $F_g = 2\cdot\sin(\alpha)\cdot F_s \Rightarrow F_s = \frac{F_g}{2\cdot\sin(\alpha)} \approx 206{,}2$ N (2)

Aufgabe 2a: Kräftezerlegung (6)
Berechne die Kräfte in den beiden Seilen, welche die 20 kg schwere Lampe rechts halten. Stelle dazu alle Teilkräfte in einer vollständig beschrifteten Skizze dar.



Aufgabe 2a: Kräftezerlegung (6)
Die Winkel zur Horizontalen sind

links $\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 33{,}7°$ und rechts $\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 14{,}0°$. (1)

Gleichgewicht in x-Richtung:

$\cos(\alpha_1)\cdot F_1 - \cos(\alpha_2)\cdot F_2 = 0 \Leftrightarrow 0{,}83\cdot F_1 - 0{,}97\cdot F_2 \approx 0 \Leftrightarrow F_1 = 1{,}17\cdot F_2$. (1)

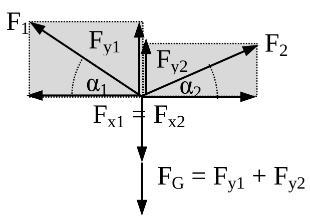
Gleichgewicht in y-Richtung:

$\sin(\alpha_1)\cdot F_1 + \sin(\alpha_2)\cdot F_2 = 200 \text{ N} \Leftrightarrow 0{,}55\cdot F_1 + 0{,}24\cdot F_2 \approx 200 \text{ N}$ (1)

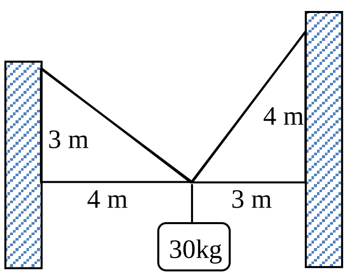
Einsetzen ergibt $0{,}65\ F_2 + 0{,}24\cdot F_2 \approx 200$ N

$\Rightarrow F_2 \approx \frac{200 \text{ N}}{0{,}89} \approx \underline{224 \text{ N}}$ und $F_1 \approx 1{,}17\cdot F_2 \approx \underline{262 \text{ N}}$ (1)

Beschriftete Skizze (2)



Aufgabe 2b: Kräftezerlegung (4)
Berechne die Kräfte in den beiden Seilen, welche die 30 kg schwere Lampe rechts halten. Stelle dazu alle Teilkräfte in einer vollständig beschrifteten Skizze dar.



Aufgabe 2b: Kräftezerlegung (4)
Die Winkel zur Horizontalen sind

links $\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right) \approx 36{,}7°$ und rechts $\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\dfrac{4}{3}\right) \approx 53{,}3°$. (1)

Gleichgewicht in x-Richtung:

$\cos(\alpha_1)\cdot F_1 - \cos(\alpha_2)\cdot F_2 = 0 \Leftrightarrow 0{,}8\cdot F_1 - 0{,}6\cdot F_2 = 0 \Leftrightarrow F_1 = 0{,}75\cdot F_2$. (1)

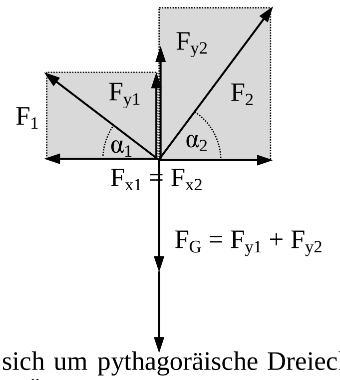
Gleichgewicht in y-Richtung:

$\sin(\alpha_1)\cdot F_1 + \sin(\alpha_2)\cdot F_2 = 200\text{ N} \Leftrightarrow 0{,}6\cdot F_1 + 0{,}8\cdot F_2 = 300\text{ N}$ (1)

Einsetzen ergibt $0{,}45\ F_2 + 0{,}8\cdot F_2 = 300$ N

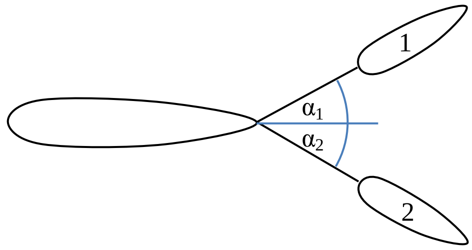
$\Rightarrow F_2 = \dfrac{300\text{ N}}{1{,}25} = \underline{240\text{ N}}$ und $F_1 = 0{,}75\cdot F_2 = \underline{180\text{ N}}$ (1)

Beschriftete Skizze (2)

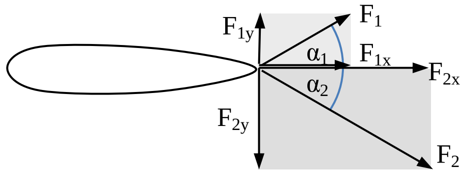


(Die glatten und trotzdem exakten Ergebnisse kommen dadurch zustande, dass es sich um pythagoräische Dreiecke mit 5 m langen Hypotenusen handelt. Daher lässt sich in diesem Fall das Ergebnis auch über Ähnlichkeitsbetrachtungen bzw. gleiche Proportionen von Seil- und Kräftedreiecken ziemlich leicht gewinnen.)

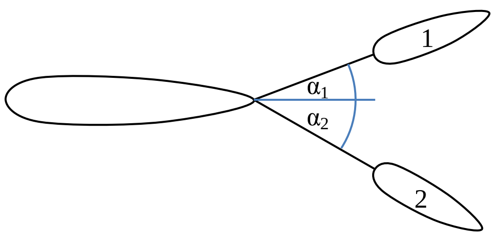
Aufgabe 3a: Kräftezerlegung
Schlepper 1 zieht mit $F_1 = 600$ kN im Winkel $\alpha_1 = 30°$ links zu Fahrtrichtung, Schlepper 2 mit $F_2 = 1200$ kN im Winkel $\alpha_2 = -30°$ rechts zur Fahrtrichtung. In welche Richtung und mit wieviel kN wird das Schiff gezogen?



Aufgabe 3a: Kräftezerlegung
Die Resultierende in Fahrtrichtung ist $F_x = F_1\cdot\cos(\alpha_1) + F_2\cdot\cos(\alpha_2) = 1558{,}8$ N. Die Resultierende senkrecht zur Fahrtrichtung ist $F_y = F_1\cdot\sin(\alpha_1) + F_2\cdot\sin(\alpha_2) = -300$ kN. Die Resultierende hat also den Betrag $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \approx \underline{1587{,}4\text{ kN}}$ und den Winkel $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{F_y}{F_x}\right) \approx \underline{-10{,}9°}$ rechts zur Fahrtrichtung.



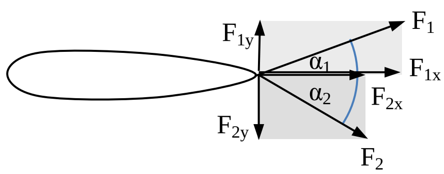
Aufgabe 3b: Kräftezerlegung
Schlepper 1 zieht mit $F_1 = 600$ kN im Winkel $\alpha_1 = 30°$ links zu Fahrtrichtung, Schlepper 2 wurde etwas abgetrieben und zieht nun im Winkel $\alpha_2 = 40°$ rechts zur Fahrtrichtung. Mit welcher Kraft F_2 muss er ziehen, damit das Schiff noch geradeaus fährt und mit welcher Kraft wird es dann in Fahrtrichtung gezogen?



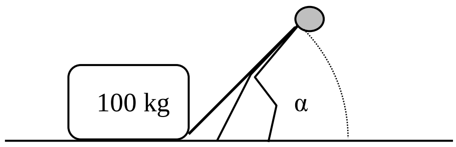
Aufgabe 3b: Kräftezerlegung
Die Komponenten quer zur Fahrtrichtung müssen sich aufheben:

$F_y = F_1\sin(\alpha_1) + F_2\sin(\alpha_2) = 0 \Leftrightarrow F_2 = F_1\cdot\dfrac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} \approx \underline{466{,}7\text{ kN}}$.

Die Resultierende in Fahrtrichtung ist
$F_x = F_1\cdot\cos(\alpha_1) + F_2\cdot\cos(\alpha_2) = \underline{877{,}1\text{ kN}}$.



Aufgabe 4a: Kräftezerlegung (4)
Ein Arbeiter zieht eine 100 kg schwere Kiste an einem um 45° geneigten Seil über den Boden mit Gleitreibungskoeffizient $\mu = 1$. Wie stark muss er an dem Seil ziehen? Beachte, dass er durch den nach oben gerichteten Anteil der Kraft auch die Reibungskraft vermindert.

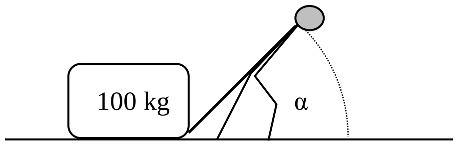


Aufgabe 4a: Kräftezerlegung (4)
x-Richtung: $F_R = \cos(\alpha)\cdot F_s$ (1)
y-Richtung: $F_N = m\cdot g - \sin(\alpha)\cdot F_s$ (1)

Reibungskraft $F_R = \mu\cdot F_N \Leftrightarrow \cos(\alpha)\cdot F_s = \mu\cdot(F_g - \sin(\alpha)\cdot F_s) \Leftrightarrow$ Seilkraft $F_s = \dfrac{\mu}{\cos(\alpha) + \mu\cdot\sin(\alpha)} F_g = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\ F_g \approx \underline{707\text{ N}}$. (2)

Aufgabe 4b: Kräftezerlegung (4)

Ein Arbeiter zieht eine 100 kg schwere Kiste an einem um 30° geneigten Seil über den Boden mit Gleitreibungskoeffizient $\mu = 0{,}8$. Wie stark muss er an dem Seil ziehen? Beachte, dass er durch den nach oben gerichteten Anteil der Kraft auch die Reibungskraft vermindert.



Aufgabe 4b: Kräftezerlegung (4)

x-Richtung: $F_R = \cos(\alpha)\cdot F_s$ (1)

y-Richtung: $F_N = m\cdot g - \sin(\alpha)\cdot F_s$ (1)

Reibungskraft $F_R = \mu\cdot F_N \Leftrightarrow \cos(\alpha)\cdot F_s = \mu\cdot(F_g - \sin(\alpha)\cdot F_s) \Leftrightarrow$ Seilkraft $F_s = \dfrac{\mu}{\cos(\alpha)+\mu\cdot\sin(\alpha)} F_g \approx \underline{\underline{632\text{ N}}}$. (2)

Aufgabe 5a: Schiefe Ebene

Bei einem Umzug soll eine 50 kg schwere Truhe über eine 30° steile Bretterrampe zum 1. Stock hochgezogen werden. Mit welcher Kraft muss man ziehen, wenn die Haftreibungszahl $\mu = 0{,}2$ beträgt? Rechne mit der Gravitationsfeldstärke $g \approx 10\text{ m/s}^2$.

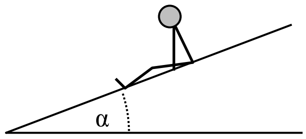
Aufgabe 5a: Schiefe Ebene

Da bei dieser Aufgabe nach oben gezogen wird, addieren sich diesmal Hangabtriebskraft und Reibungskraft zur Zugkraft

$F = F_H + F_R = [\sin(\alpha) + \mu\cdot\cos(\alpha)]\cdot m\cdot g \approx 336{,}6\text{ N}$

Aufgabe 5b: Schiefe Ebene (8)

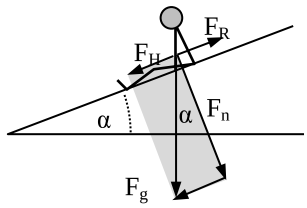
Ein 20 kg schweres Kind sitzt auf eine Rutsche mit dem Neigungswinkel $\alpha = 40°$ und der Gleitreibungszahl $\mu = 0{,}3$.



a) Stelle alle Teilkräfte in einer beschrifteten Skizze dar. (2)
b) Berechne die resultierende Beschleunigungskraft, die infolge der Schwerebeschleunigung $g \approx 10\text{ m/s}^2$ in Bewegungsrichtung auf das Kind wirkt. (3)
c) Welchen Neigungswinkel muss eine Rutsche mindestens aufweisen, wenn sie mit Nylon-Matschhosen (Haftreibungszahl $\mu = 0{,}5$) noch funktionieren soll? (2)
d) Bei welcher Reibungszahl μ funktioniert die Rutsche aus a) nicht mehr? (1)

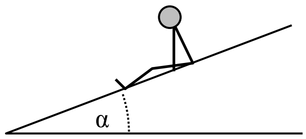
Aufgabe 5b: Schiefe Ebene (8):

a) Beschriftete Skizze (2)
b) Hangabtriebskraft $F_H = \sin(\alpha)\cdot F_g \approx \underline{128{,}5\text{ N}}$ (1)
Reibungskraft $F_R = \mu\cdot F_N = \mu\cdot\cos(\alpha)\cdot F_g \approx \underline{46\text{ N}}$ (1)
Die resultierende Beschleunigungskraft ist: $F_{res} = F_H - F_R \approx \underline{82{,}5\text{ N}}$ (1)
c) Das Kind fängt an zu rutschen, wenn die resultierende Beschleunigungskraft $F_H - F_R = 0$ ist. Durch Einsetzen erhält man
$0 = \sin(\alpha)\cdot F_G - \mu\cdot\cos(\alpha)\cdot F_G = [\sin(\alpha) - \mu\cdot\cos(\alpha)]\cdot F_G \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \mu\cdot\cos(\alpha) \Leftrightarrow$
$\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \mu \Leftrightarrow \tan(\alpha) = \mu \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}(\mu) \approx \underline{\underline{26{,}2°}}$. (2)
d) Ansatz wie bei b), aber diesmal löst man nach μ auf: $\mu = \tan(\alpha) \approx \underline{\underline{0{,}84}}$. (1)



Aufgabe 5c: Schiefe Ebene (8)

Ein 15 kg schweres Kind sitzt auf eine Rutsche mit dem Neigungswinkel $\alpha = 30°$ und der Gleitreibungszahl $\mu = 0{,}3$.



a) Stelle alle Teilkräfte in einer beschrifteten Skizze dar. (2)
b) Berechne die resultierende Beschleunigungskraft, die infolge der Schwerebeschleunigung $g \approx 10\text{ m/s}^2$ in Bewegungsrichtung auf das Kind wirkt. (3)
c) Welchen Neigungswinkel muss eine Rutsche mindestens aufweisen, wenn sie mit Haftreibungszahl $\mu = 0{,}4$ noch funktionieren soll? (2)
d) Bei welcher Reibungszahl μ funktioniert die Rutsche aus a) nicht mehr? (1)

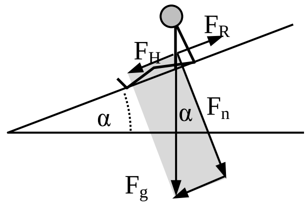
Aufgabe 5c: Schiefe Ebene (8):

a) Beschriftete Skizze (2)

b) Hangabtriebskraft $F_H = \sin(\alpha)\cdot F_g = \underline{\underline{75\ N}}$ (1)

Reibungskraft $F_R = \mu\cdot F_N = \mu\cdot\cos(\alpha)\cdot F_g \approx \underline{\underline{39\ N}}$ (1)

Die resultierende Beschleunigungskraft ist: $F_{res} = F_H - F_R \approx \underline{\underline{36\ N}}$ (1)



c) Das Kind fängt an zu rutschen, wenn die resultierende Beschleunigungskraft $F_H - F_R = 0$ ist. Durch Einsetzen erhält man

$$0 = \sin(\alpha)\cdot F_G - \mu\cdot\cos(\alpha)\cdot F_G = [\sin(\alpha) - \mu\cdot\cos(\alpha)]\cdot F_G \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \mu\cdot\cos(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \mu \Leftrightarrow \tan(\alpha) = \mu \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}(\mu) \approx \underline{\underline{21{,}8°}}.$$ (2)

d) Ansatz wie bei b), aber diesmal löst man nach μ auf: $\mu = \tan(\alpha) \approx \underline{\underline{0{,}58}}$. (1)

Aufgabe 6a: Gravitationskraft (3)

Bei uns in 6370 km Entfernung zum Massenmittelpunkt der Erde ist die Fallbeschleunigung ca. 10 m/s^2. Wie groß ist sie in 6370 km Höhe? Begründe.

Aufgabe 6a: Gravitationskraft (3)

Nach dem Gravitationsgesetz ist die Gravitationskraft $F_G = \gamma\cdot\frac{M\cdot m}{r^2}$ und damit auch die Fallbeschleunigung $g = \frac{F_G}{m} = \gamma\cdot\frac{M}{r^2}$ antiproportional zum Abstandsquadrat r^2. (2)

Bei doppeltem Abstand sinkt die Gravitationskraft bzw. die Fallbeschleunigung auf ein Viertel des ursprünglichen Wertes, also 2,5 m/s^2. (1)

Aufgabe 6b: Gravitationskraft (3)

Der Jupiter ist ungefähr 300 mal so schwer und 12 mal so groß wie der Erde. Welche Fallbeschleunigung wirkt an seiner Oberfläche? Begründe.

Aufgabe 6b: Gravitationskraft (3)

Nach dem Gravitationsgesetz ist die Gravitationskraft $F_G = \gamma\cdot\frac{M\cdot m}{r^2}$ und damit auch die Fallbeschleunigung $g = \frac{F_G}{m} = \gamma\cdot\frac{M}{r^2}$ antiproportional zum Abstandsquadrat r^2 und proportional zur Masse M. (2)

Bei 12-fachem Abstand und 300-facher Masse steigt die Fallbeschleunigung also auf ca. $\frac{300}{12^2}\cdot 10\ \text{m/s}^2 \approx 20\ \text{m/s}^2$. (1)

Aufgabe 6c: Gravitationskraft (3)

Die Erde ist ungefähr 10 mal so schwer und 2 mal so groß wie der Mars. Welche Fallbeschleunigung wirkt an seiner Oberfläche? Begründe.

Aufgabe 6c: Gravitationskraft (3)

Nach dem Gravitationsgesetz ist die Gravitationskraft $F_G = \gamma\cdot\frac{M\cdot m}{r^2}$ und damit auch die Fallbeschleunigung $g = \frac{F_G}{m} = \gamma\cdot\frac{M}{r^2}$ antiproportional zum Abstandsquadrat r^2 und proportional zur Masse M. (2)

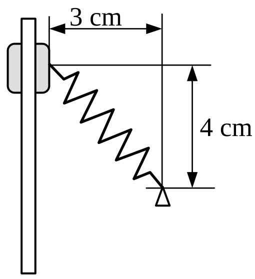
Bei 2-fachem Abstand und 10-facher Masse ist die Fallbeschleunigung auf der Erde also ca. $\frac{10}{2^2}$ ·= 2,5 mal größer als auf dem Mars. Auf dem Mars ist sie also 2,5 mal kleiner, d.h. ca 4 m/s^2. (1)

Aufgabe 7: Federkräfte

Eine Hülse ist auf einer senkrechten Schiene beweglich und wird von einer schräg befestigten Rückstellfeder gespannt, die im entspannten Zustand 4 cm lang ist und die Federkonstante D = 5 N/cm besitzt.

a) Berechne den Gesamtbetrag der Federkraft.

b) Wie groß sind die Komponenten der Federkraft parallel zur Schiene (Rückstellkraft) und senkrecht zur Schiene?

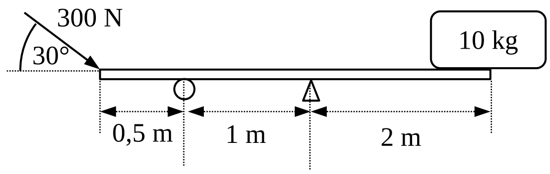


Aufgabe 7: Federkräfte

a) Die gespannte Feder hat die Länge $s = \sqrt{3^2+4^2}$ cm = 5 cm und wurde also um Δs = 1 cm gedehnt. Die dafür erforderliche Federkraft ist also $\Delta F = D\cdot\Delta s$ = 5 N.

b) Die Komponente in Bewegungsrichtung ist $F_y = \frac{4}{5}\cdot 5$ N = 4 N und die Komponente senkrecht zur Schiene ist $F_x = \frac{3}{5}\cdot 5$ N = 3 N (Strahlensatz bzw. zentrische Streckung) Man kann natürlich auch wie gewohnt über den Winkel $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx$ 53,13° zur Schiene rechnen, aber die Rechnung ist länger und die Ergebnisse weniger exakt!

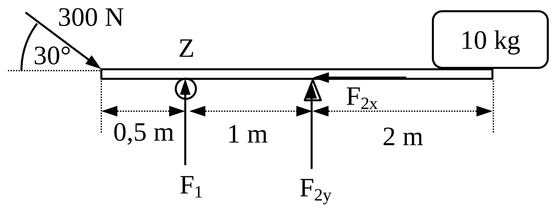
Aufgabe 8a: Gleichgewicht (6)
Berechne Betrag und Richtung aller Lagerkräfte. Zeichne die Lagerkräfte selbst ein und wähle eine geeignete Bezugsachse für die Drehmomentbilanz.



Lösungen (6)
Kräfte und Bezugsachse einzeichnen (1)
$\Sigma F_x = 0$

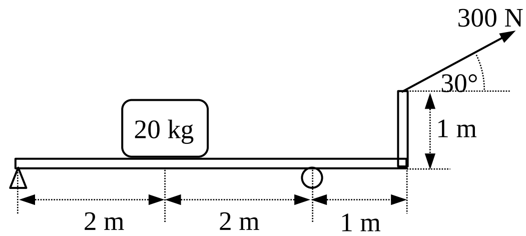
$\Rightarrow F_{2x} = 300\text{ N}\cdot\cos(30°) \approx \underline{\underline{259{,}8\text{ N}}}$ (1)

$\Sigma F_y = 0$
$-300\text{ N}\cdot\sin(30°) + F_1 - 100\text{ N} + F_{2y} = 0$
$\Rightarrow F_1 + F_{2y} = 250\text{ N}$ (1)



$\Sigma M_Z = 0$
$+0{,}5\text{ m}\cdot 300\text{ N}\cdot\sin(30°) - 3\text{ m}\cdot 100\text{ N} + 1\text{ m}\cdot F_{2y} = 0$ (1)
$75\text{ Nm} - 300\text{ Nm} = -1\text{ m}\cdot F_{2y}$
$\Rightarrow F_{2y} = \underline{\underline{225\text{ N}}}$ und $F_1 = 250\text{ N} - F_{2y} \approx \underline{\underline{25\text{ N}}}$ (2)

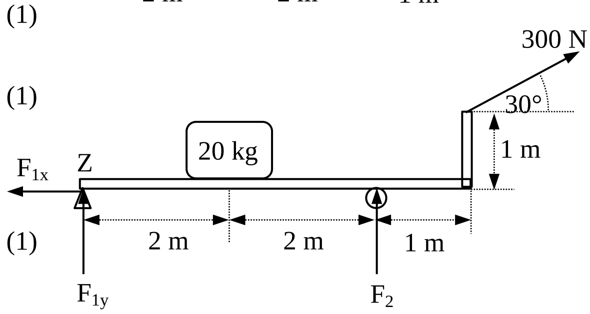
Aufgabe 8b: Gleichgewicht (6)
Berechne Betrag und Richtung aller Lagerkräfte. Zeichne die Lagerkräfte selbst ein und wähle eine geeignete Bezugsachse für die Drehmomentbilanz.



Lösungen (6)
Kräfte und Bezugsachse einzeichnen (1)
$\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow F_{1x} = 300\text{ N}\cdot\cos(30°) \approx \underline{\underline{259{,}8\text{ N}}}$ (1)

$\Sigma F_y = 0$
$300\text{ N}\cdot\sin(30°) + F_{1y} - 200\text{ N} + F_2 = 0$
$\Rightarrow F_{1y} + F_2 = 550\text{ N}$ (1)



$\Sigma M_Z = 0$
$5\text{ m}\cdot 300\text{ N}\cdot\sin(30°) - 1\text{ m}\cdot 300\text{ N}\cdot\cos(30°) - 2\text{ m}\cdot 200\text{ N} + 4\text{ m}\cdot F_{2y} = 0$ (1)
$\Rightarrow 750\text{ Nm} - 259{,}9\text{ Nm} - 400\text{ Nm} = -4\text{ m}\cdot F_{2y}$
$\Rightarrow F_2 \approx -\underline{\underline{22{,}5\text{ N}}}$ (Zugkraft!) und $F_{1y} = 50\text{ N} - F_{2y} \approx \underline{\underline{72{,}5\text{ N}}}$ (2)