

1.4. Dynamik der Massenpunkte

1.4.1. Die Newtonschen Axiome

[esacast professor pavia on the law of inertia](#)

1. Newtonsches Axiom (Trägheitssatz)

Ist die Summe aller Kräfte auf **einen** Körper Null, so bleibt er in Ruhe oder im Zustand der gleichförmigen Bewegung

[esacast professor pavia on force, mass and acceleration](#)

2. Newtonsches Axiom (Masse und Beschleunigung)

Ist \vec{F} die Summe aller Kräfte auf **einen** Körper der Masse m , so ändert er seine Bewegung mit der Beschleunigung $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.

[esacast professor pavia on action and reaction](#)

3. Newtonsches Axiom (actio = reactio)

Wenn ein Körper A auf einen Körper B die Kraft \vec{F}_A ausübt, so übt B auf A die entgegengesetzt gleiche Kraft $\vec{F}_B = -\vec{F}_A$ aus.

Übungen: Aufgaben zur Dynamik Nr. 1 - 7

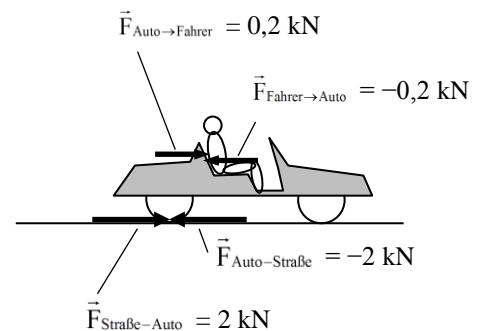
Inertialsysteme

Die ersten beiden Newtonschen Axiome gelten auch in bewegten Systemen wie z.B. der Planeten, Schiffen, Flugzeugen und Zügen, solange diese sich geradlinig gleichförmig bewegen. Solche Systeme heißen **Inertialsysteme** (lat inertia = Trägheit), da in ihnen das Trägheitsprinzip gilt. **Nichtinertialsysteme** wie z.B. ein bremsender oder in die Kurve fahrender Zug erfüllen nicht die Newtonschen Axiome, denn infolge der Bewegungsänderung des gesamten Bezugssystems treten unvermutete **Scheinkräfte** auf, die innerhalb des Bezugssystems nicht auf die Wirkung anderer Körper zurückzuführen sind. Die bekanntesten Scheinkräfte sind **Brems-, Beschleunigungs- und insbesondere Fliehkräfte** bei Drehbewegungen. Wenn man ihre Ursache in Form der Beschleunigung \vec{a} des Bezugssystems kennt, kann man sie wie gewohnt mit $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ berechnen. Man muss aber darauf achten, dass sich die **Beschleunigung** \vec{a} nicht auf den Körper mit der Masse m relativ zum Bezugssystem, sondern auf das **komplette Bezugssystem selbst** bezieht. Die Betrachtung von beschleunigten Nichtinertialsystemen ist in vertrauten **Alltagssituationen** problemlos möglich, solange man Richtungen und Beträge aller Kräfte und Beschleunigungen aus **Erfahrung** einschätzen kann. In unvertrauten Situationen wie z.B. bei der Bewegung von Elementarteilchen oder Himmelskörpern dagegen sollten nur Inertialsysteme verwendet werden! Einzig das 3. Newtonsche Axiom gilt auch in Nichtinertialsystemen.

Beispiel:

Ein 100 kg schwerer Mann sitzt in einem 900 kg schweren Sportwagen und beschleunigt mit 2 m/s^2 . Bei den folgenden Betrachtungen lassen wir die senkrecht wirkende Schwerkraft unberücksichtigt und beschränken uns auf Kräfte und Beschleunigungen in horizontaler Richtung.

- a) Welche Kraft übt das Auto auf die Straße aus?
- b) Welche Kraft übt die Straße auf das Auto aus?
- c) Welche Kraft übt der Sitz auf den Fahrer aus?
- d) Welche Kraft übt der Fahrer auf den Sitz aus?
- e) Welche Beschleunigung erfährt der Fahrer in Bezug auf das System des Autos?
- f) Welche Beschleunigung erfährt der Fahrer in Bezug auf das System der Straße?



Lösungen:

a) - d): siehe Skizze.

- e) In Bezug auf das Auto ist $a = 0$, obwohl der Sitz eine Kraft von $\vec{F}_{\text{Auto} \rightarrow \text{Fahrer}} = +0,2 \text{ kN}$ auf den Fahrer ausübt. Die Gegenkraft $\vec{F}_{\text{Fahrer} \rightarrow \text{Auto}} = -0,2 \text{ kN}$ ist eine **Scheinkraft**, die aus der Beschleunigung des Fahrers in Bezug auf die Straße herrührt. Im System Auto herrscht Gleichgewicht und der Fahrer bleibt in Ruhe: $\vec{F}_{\text{Auto} \rightarrow \text{Fahrer}} + \vec{F}_{\text{Fahrer} \rightarrow \text{Auto}} = 0$ und $\vec{a}_{\text{Mann}} = 0$.
- f) Im System Straße herrscht kein Gleichgewicht und der Fahrer wird gemeinsam mit dem Auto beschleunigt $\vec{a}_{\text{Fahrer}} = 2 \text{ m/s}^2$ und $\vec{F}_{\text{Auto} \rightarrow \text{Fahrer}} = m_{\text{Fahrer}} \cdot \vec{a}_{\text{Fahrer}} = 0,2 \text{ kN}$

Übungen: Aufgaben zur Dynamik Nr. 8 - 10

1.4.2. Die gleichförmige Kreisbewegung

Für die Beschreibung von Kreisbewegungen sind die folgenden Größen in Gebrauch:

Drehzahl oder Frequenz = Umdrehungen pro Zeit

$$f = \frac{dn}{dt} \quad \text{mit} \quad [f] = \frac{1}{s} = \text{Hertz Hz}$$

Winkelgeschwindigkeit = Bogenmaß pro Zeit

= Bogenlänge auf dem Einheitskreis pro Zeit
 = Geschwindigkeit auf dem Einheitskreis

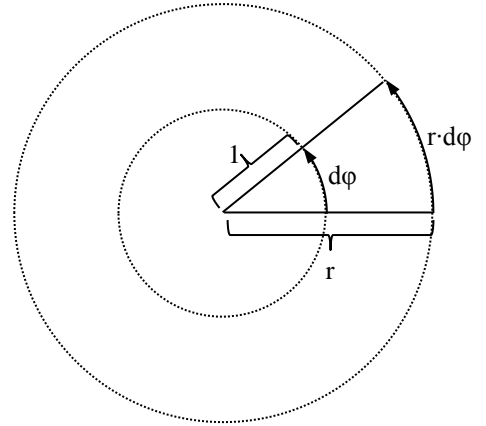
$$\begin{aligned} \omega &= \frac{d\phi}{dt} \\ &= \frac{2\pi \cdot dn}{dt} \\ &= 2\pi f \quad \text{mit} \quad [\omega] = \frac{1}{s} = \text{Hz} \end{aligned}$$

Tangentialgeschwindigkeit = Bogenlänge auf dem Kreis mit Radius r pro Zeit

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{r \cdot d\phi}{dt} \\ &= \omega r \quad \text{mit} \quad [v_t] = \frac{m}{s} \end{aligned}$$

Radialgeschwindigkeit = Radiusänderung pro Zeit

$$v_r = \frac{dr}{dt}$$



Bei der **gleichförmigen Kreisbewegung** auf konstanten Radius, ist $v_r = 0$ und man bezeichnet die Tangentialgeschwindigkeit einfach als **Geschwindigkeit v**.

Beispiel:

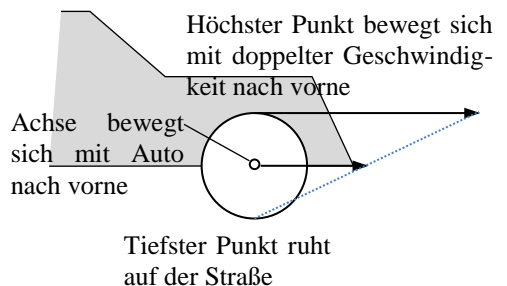
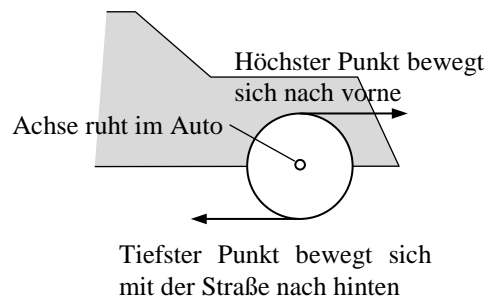
- a) Berechne Drehfrequenz und Winkelgeschwindigkeit der 80 cm hohen Räder eines 72 km/h schnellen Autos.
- b) Berechne die Geschwindigkeiten des höchsten und des tiefsten Punktes der Reifen im Bezugssystem des fahrenden Autos.
- c) Bestimme die Geschwindigkeiten aus b) im Bezugssystem der Straße.

Lösungen:

a) Geschwindigkeit $v = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$. Der Umfang $u = \pi \cdot d \approx 2,51 \text{ m}$ muss also pro Sekunde $\frac{20 \text{ m}}{2,51 \text{ m}} \approx 7,96$ mal pro Sekunde abgerollt werden. Die Drehfrequenz ist also $f = \frac{v}{u} \approx 7,96 \frac{1}{s}$ und die Winkelgeschwindigkeit beträgt $\omega = \frac{v}{r} = 50 \frac{1}{s}$.

b) Im achsfesten System ist $v_{\text{oben}} = \omega r = 50 \frac{1}{s} \cdot (+0,4 \text{ m}) = +20 \frac{m}{s}$,
 $v_{\text{Achse}} = 0 \frac{m}{s}$ und $v_{\text{unten}} = \omega r = 50 \frac{1}{s} \cdot (-0,4 \text{ m}) = -20 \frac{m}{s}$. (siehe Abb.)

c) Im straßenfesten System ist $v_{\text{oben}} = \omega r = 50 \frac{1}{s} \cdot 0,8 \text{ m} = 40 \frac{m}{s}$,
 $v_{\text{Achse}} = \omega r = 50 \frac{1}{s} \cdot 0,4 \text{ m} = 20 \frac{m}{s}$ und $v_{\text{unten}} = 0 \frac{m}{s}$. (siehe Abb.)

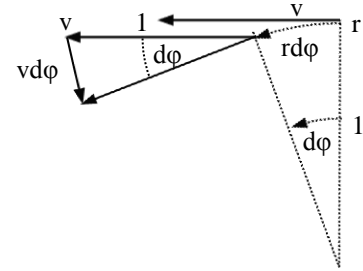


Übungen: Aufgaben zur Dynamik Nr. 11 - 12

1.4.3. Die Zentripetalbeschleunigung

Um einen mit der Geschwindigkeit v geradeaus fliegenden Körper der Masse m auf eine Kreisbahn mit Radius r zu zwingen, muss er für jeden überstrichenen Winkelabschnitt $d\phi$ um die Geschwindigkeit $dv = v \cdot d\phi$ in Richtung Zentrum beschleunigt werden. Die dazu notwendige **Zentripetalbeschleunigung** a_z (lat. petere = streben nach) ist also

$$\begin{aligned} a_z &= \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{v \cdot d\phi}{dt} \\ &= v \cdot \omega \quad \text{mit der Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{d\phi}{dt} \\ &= \frac{v^2}{r} \quad \text{wegen } v = \omega \cdot r \end{aligned}$$



Die entsprechende **Zentripetalkraft** $F_z = ma_z = m \cdot v \cdot \omega = \frac{mv^2}{r}$ ist ebenfalls nach innen gerichtet und bewirkt die Beschleunigung nach innen in die Richtung des Kurvenzentrums. Im beschleunigten **Nichtinertialsystem** z.B. eines fensterlosen Zuges wird die Kurve aber gar nicht registriert. Da die deutlich fühlbare Zentripetalkraft der Wand oder des Sitzpolsters im Nichtinertialsystem des Zuges keine Bewegungsänderung zur Folge hat, herrscht **Kräftegleichgewicht** zwischen der **nach innen gerichteten Zentripetalkraft** mit der gleich großen, **nach außen gerichteten Zentrifugalkraft**. Da diese Kraft z.B. im plötzlich in die Kurve fahrenden Zug scheinbar keine Ursache hat und nur in beschleunigten Systemen auftritt, wird sie als **Scheinkraft** bezeichnet. In **vertrauten Alltagssituationen mit gleichförmigen Kreisbewegungen** kann durchaus die Zentrifugalkraft im Nichtinertialsystem des kreisenden Körpers verwendet werden, bei komplizierteren Bewegungen ist dringend davon abzuraten!

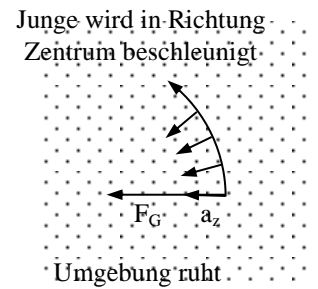
Beispiel:

Auf einem Spielplatz hat sich ein 20 kg schwerer Junge auf einer 4 m grossen Drehscheibe in Schwung gebracht, dass er alle zwei Sekunden eine Umdrehung schafft. Mit welcher Kraft wird er gegen das Geländer gedrückt, wenn er ganz am Rand steht?

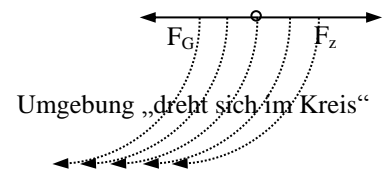
Im **Inertialsystem** des außenstehenden Beobachters wird der Junge ständig nach innen beschleunigt. Mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \pi \text{ s}^{-1}$ erhält man die **Zentripetalbeschleunigung** $a_z = \omega^2 r = 2\pi^2 \text{ m/s}^2$ und nach dem **2. Newtonschen Axiom** die Geländerkraft $F_G = ma_z = 40 \pi^2 = 394,8 \text{ N}$.

Im **beschleunigten Nicht-Inertialsystem** des Jungen dreht sich die Umgebung um ihn im Kreis, während er selbst ruht.. Es herrscht also Kräftegleichgewicht und nach dem **3. Newtonschen Axiom** ist die **Zentrifugalkraft** $F_z = +197,4 \text{ N}$ (Berechnung siehe oben) entgegengesetzt gleich der Geländerkraft $F_G = -197,4 \text{ N}$.

Übungen. Aufgaben zur Dynamik Nr. 13 - 19



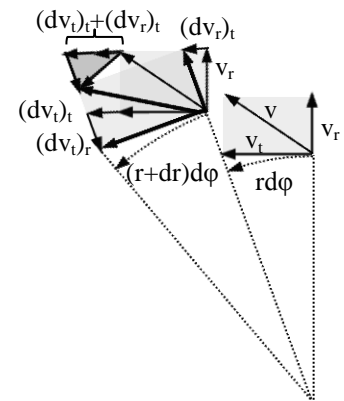
Junge steht im „Kräftegleichgewicht“



1.4.4. Die Coriolis-Beschleunigung

Möchte man sich auf einer mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ drehenden Scheibe vom Zentrum aus radial mit der Geschwindigkeit $v_r = \frac{dr}{dt}$ nach außen bewegen, so muss man dazu in drei Schritten die Geschwindigkeit ändern: (dunkles Dreieck)

1. Die **Tangentialgeschwindigkeit** $v_t = \omega r$ nimmt in der Zeit dt in **tangentialer** Richtung um $(dv_t)_t = \omega \cdot dr$ zu.
2. Infolge der Kurvenkrümmung ändert sie aber auch ihre Richtung **radial** um den Betrag $(dv_t)_r = \omega \cdot r \cdot d\varphi$.
3. Umgekehrt ändert sich die Richtung der **Radialgeschwindigkeit tangential** um den Betrag $(dv_r)_t = v \cdot d\varphi$.
4. Da die radiale Bewegung im rotierenden Bezugssystem gleichförmig sein soll, ist $(dv_r)_r = 0$.



In tangentialer Richtung erhält man die **Coriolisbeschleunigung**

$$a_t = \frac{(dv)_t}{dt} = \frac{(dv_t)_t}{dt} + \frac{(dv_r)_t}{dt} = \omega \cdot \frac{dr}{dt} + v_r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega v_r + \omega v_r = 2 \omega v_r.$$

In radialer Richtung erhält man wieder die **Zentripetalbeschleunigung**

$$a_r = \frac{(dv_r)_r}{dt} = \omega r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega^2 r = \omega v_t.$$

In der Skizze ist $dt \approx 1$ und damit $v_r \approx dr$ sowie $v_t \approx r d\varphi$.

Beachte, dass in der **Coriolisbeschleunigung** die **Radialgeschwindigkeit** v_r , in der **Zentripetalbeschleunigung** aber die **Tangentialgeschwindigkeit** v_t auftritt!

Übungen: Aufgaben zur Dynamik Nr. 20 und 21