1.6. Prüfungsaufgaben zur Impulserhaltung

Aufgabe 1: Impulserhaltung
Urs wiegt 40 kg und rollt mit 2 m/s auf seinem 2 kg schweren Skateboard auf die Mädchen zu. Jetzt springt er nach hinten ab, so dass er auf v = 1 m/s abbremst und lässig zum Stehen kommt. Wie schnell schießt das Skateboard jetzt in Richtung auf die kleine Lisa davon?

Lösung (alles in SI, M = Urs, m = Board)

$Mv_M + mv_m = Mv_M' + mv_m' \Leftrightarrow 40{\cdot}2 + 2{\cdot}2 = 40{\cdot}1 + 2{\cdot}v_m' \Leftrightarrow 44 = 2v_m' \Rightarrow$ Das Board schießt mit $v_m' = 22\ \frac{m}{s} = 79{,}2\ \frac{km}{h}$ davon. Gut, dass es Luft- und Reibungswiderstand gibt!

Aufgabe 2: Kraftstoß (4)
Der 60 kg schwere Max stösst sich mit 200 N während 0,5 Sekunden von dem 200 kg schweren Tretboot ab, um an das 1 m entfernte Ufer zu springen. Wie schnell wird er dabei? Wie weit hat sich das Boot in der halben Sekunde schon vom Ufer fortbewegt?

Lösung

Von Max aus erhält das Boot den Impuls $-F{\cdot}\Delta t = -100\ kg{\cdot}\frac{m}{s} = 200\ kg{\cdot}v_{Boot} \Rightarrow v_{Boot} = -0{,}5\ \frac{m}{s}$ (1)

Vom Boot aus erhält Max den Impuls $+F{\cdot}\Delta t = +100\ kg{\cdot}\frac{m}{s} = 60\ kg{\cdot}v_{Max} \Rightarrow v_{Max} = +\ 1{,}\overline{6}\ \frac{m}{s}$ (1)

Die Beschleunigung des Bootes ist $a_{Boot} = \frac{v_{Boot}}{\Delta t} = 1\ \frac{m}{s^2}$ und der zurückgelegte Weg ist $\Delta s = \frac{1}{2} a_{Boot}(\Delta t)^2 = 12{,}5$ cm. (2)

Um diese Strecke muss Max weiter springen!

Aufgabe 3: Zentraler unelastischer Stoß
Ein Wagen prallt **unelastisch** mit 6 m/s auf zwei gekoppelte, jeweils gleich schwere ruhende Wagen.

- Wie schnell und in welche Richtung bewegen sich die Wagen nach dem Stoss?
- Wie viel Prozent der Bewegungsenergie werden in Wärme umgewandelt?

Aufgabe 3: Zentraler unelastischer Stoß

Impulserhaltung: $1{\cdot}6 = 3{\cdot}v \Rightarrow \underline{v = 2\ m/s}$ (1)

Energieerhaltung: $\frac{1}{2}{\cdot}1{\cdot}6^2 = \frac{1}{2}{\cdot}3{\cdot}2^2 + Q \Leftrightarrow 18 = 6 + Q \Rightarrow Q = 12\ J = 66{,}\overline{6}$ % von $E_{kin} = 18$ J. (2)

Aufgabe 4a: Zentraler elastischer Stoß (5)
Ein 100 g schwerer Modellbahnwagen prallt vollkommen elastisch mit 2 m/s auf einen ruhenden 200 g schweren zweiten Wagen. Wie schnell und in welche Richtung bewegen sich die beiden Wagen nach dem Stoss?

Lösung: (Alles in g und m/s)

Impulserhaltung: $100{\cdot}2 = 100{\cdot}v_1 + 200{\cdot}v_2 \Leftrightarrow 2 = v_1 + 2v_2$. (1)

Energieerhaltung: $\frac{1}{2}{\cdot}100{\cdot}2^2 = \frac{1}{2}{\cdot}100{\cdot}v_1^2 + \frac{1}{2}{\cdot}200{\cdot}v_2^2 \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2}v_1^2 + v_2^2$. (1)

Einsetzen und alles in SI ergibt $2 = \frac{1}{2}(2 - 2v_2)^2 + v_2^2 = 2 - 4v_2 + 3v_2^2 \Leftrightarrow 4v_2 = 3v_2^2$. (1)

Die Lösungen sind $v_{21} = 0\ \frac{m}{s}$ (vor dem Stoß) und $v_{22} = \frac{4}{3}\ \frac{m}{s}$ (2)

Einsetzen ergibt für den ersten Wagen $v_1 \approx -\frac{2}{3}$ m/s in die Gegenrichtung. (1)

Aufgabe 4b: Zentraler elastischer Stoß (5)
Ein Wagen prallt **elastisch** mit 5 m/s auf zwei gekoppelte, jeweils gleich schwere ruhende Wagen. Wie schnell und in welche Richtung bewegen sich die Wagen nach dem Stoss?

Lösungen (5)

Impulserhaltung: $1 \cdot 5 = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_{23} \Rightarrow 5 = v_1 + 2v_{23} \Leftrightarrow v_1 = 5 - 2v_{23}$ (1)

Energieerhaltung: $\frac{1}{2}\, 1 \cdot 5^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v_{23}^2 \Rightarrow 25 = v_1^2 + 2 \cdot v_{23}^2$. (1)

Einsetzen ergibt $25 = 25 - 20v_{23} + 6v_{23}^2 \Leftrightarrow v_{23}(6v_{23} - 20) = 0 \Rightarrow v_{23} = 3,\overline{3}$ m/s und $v_1 = -1\,\overline{6}$ m/s (3)

Aufgabe 5: Zentraler Stoß (10)

Zwei Gleitkörper haben die Massen $m_1 = 100$ g und $m_2 = 300$ g. Sie bewegen sich reibungsfrei auf einer geraden Bahn und stoßen mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 4$ m/s und $v_2 = -2$ m/s zusammen.

a) Berechne die Geschwindigkeiten v_1' und v_2' der beiden Körper für den Fall eines rein elastischen Stoßes. (5)
b) Berechne die Geschwindigkeit $v_1' = v_2'$ der beiden Körper für den Fall eines unelastischen Stoßes. (2)
c) Wie viel Prozent der kinetischen Energie wird im Fall b) in Wärme umgewandelt? (3)

Lösungen: (10)

a) Impulsbilanz $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Rightarrow v_1' + 3v_2' = -2\ \frac{m}{s}$ (1)

Energiebilanz: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Rightarrow 28\ \frac{m^2}{s^2} = v_1'^2 + 3v_2'^2$. (1)

Einsetzen der Impulsbilanz in SI-Einheiten: $28 = (2 + 3v_2')^2 + 3v_2'^2 \Leftrightarrow 12v_2'^2 + 12v_2' - 24 = 0 \Leftrightarrow v_2'^2 + v_2' - 2 = 0$ (1)

mit den Lösungen $v_2' = (-0,5 \pm 1,5)$ m/s und $v_1' = (-0,5 \mp 4,5)$ m/s für die Geschwindigkeiten vor **und** nach dem Stoß (1)

Die Geschwindigkeiten **nach** dem Stoß sind also $v_2' = 1\ \frac{m}{s}$ und $v_1' = -5\ \frac{m}{s}$. (1)

b) Für den unelastischen Stoß genügt die Impulsbilanz $m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' = (m_1 + m_2)\, v' \Rightarrow v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -0,5\ \frac{m}{s}$ (2)

c) Die kinetische Energie vor dem Stoß war $E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 1,4$ J (1)

Die kinetische Energie nach dem Stoß ist $E_{kin}' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v'^2 = 0,5$ J (1)

Der relative Verlust ist $\frac{E_{kin} - E_{kin}'}{E_{kin}} = 64,3\ \%$ (1)

Aufgabe 6a: Zentraler Stoß (6)

Ein 5 Tonnen schwerer Güterwagen prallt mit 36 km/h elastisch auf einen ruhenden 10 t schweren zweiten Wagen.

a) Wie schnell sind die beiden Wagen nach dem Stoß? (4)
b) Wie schnell sind die beiden Wagen nach dem Stoß, wenn sie aneinander kuppeln? (2)

Lösung: alles in SI

a) Impulserhaltung: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Leftrightarrow 50\,000 = 5000\, v_1' + 10\,000\, v_2' \Leftrightarrow 10 = v_1' + 2v_2'$. (1)

Energieerhaltung: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Leftrightarrow 250\,000 = 2500\, v_1'^2 + 5000\, v_2'^2$ (1)

$\Leftrightarrow 100 = v_1'^2 + 2v_2'^2 = (10 - 2v_2')^2 + 2v_2'^2 = 6v_2'^2 - 40v_2' + 100 \Leftrightarrow v_2'^2 - \frac{20}{3} v_2' = 0$ (1)

$\Rightarrow v_1' = -3,\overline{3}$ m/s $= -12$ km/h und $v_2' = 6,\overline{6}$ m/s = 24 km/h. (1)

b) Impulserhaltung: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v' \Leftrightarrow 50\,000 = 15\,000\, v' \Rightarrow v' = 3,\overline{3}$ m/s = 12 km/h. (2)

Aufgabe 6b: Zentraler Stoß (6)

Ein 10 Tonnen schwerer Güterwagen prallt mit 18 km/h elastisch auf einen ruhenden 5 t schweren zweiten Wagen.

a) Wie schnell sind die beiden Wagen nach dem Stoß? (4)
b) Wie schnell sind die beiden Wagen nach dem Stoß, wenn sie aneinander kuppeln? (2)

Lösung: alles in SI

a) Impulserhaltung: $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \Leftrightarrow 50\,000 = 10\,000\,v_1' + 5000\,v_2' \Leftrightarrow 10 = 2v_1' + v_2'$. (1)

Energieerhaltung: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \Leftrightarrow 125\,000 = 5000\,v_1'^2 + 2500\,v_2'^2$ (1)

$\Leftrightarrow 50 = 2v_1'^2 + v_2'^2 = 2v_1'^2 + (10 - 2v_1')^2 = 6v_1'^2 - 40v_1' + 100 \Leftrightarrow v_1'^2 - \frac{20}{3}v_1' + \frac{25}{3} = 0$ (1)

$\Rightarrow v_1' = \frac{10}{3} \pm \frac{5}{3} \Rightarrow v_1' = 1{,}\overline{6}$ m/s = 6 km/h und $v_2' = 6{,}\overline{6}$ m/s = 24 km/h (1)

b) Impulserhaltung: $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v' \Leftrightarrow 50\,000 = 15\,000\,v' \Rightarrow v' = 3{,}\overline{3}$ m/s = 12 km/h. (2)

Aufgabe 6c: Zentraler Stoß (6)

Einem mit v_1 = 36 km/h rollenden, 5 t schweren Eisenbahnwagen folgt mit v_2 = 54 km/h eine zweiter ebenso schwerer Wagen auf demselben Gleis.

a) Welche Geschwindigkeiten v_1' und v_2' haben die Wagen nach einem elastischen Zusammenstoß? (4)
b) Welche Geschwindigkeit v' haben die Wagen nach dem Stoß, wenn sie dabei aneinander koppeln? (1)
c) Wie viel Prozent der kinetischen Energie wird bei dem unelastischen Stoß aus b) in Verformungsenergie umgewandelt? (1)

Lösungen: Alles in SI; v_1 = 10 m/s und v_2 = 15 m/s

a) Impulserhaltung. $mv_1 + mv_2 = mv_1' + mv_2' \Rightarrow 25 = v_1' + v_2'$ (1)

Energieerhaltung: $\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 \Leftrightarrow 325 = v_1'^2 + v_2'^2$ (1)

Einsetzen: $325 = v_1'^2 + (25 - v_1')^2 \Leftrightarrow 0 = v_1'^2 - 25v_1' + 150 \Rightarrow v_1' = 12{,}5 \pm 2{,}5$ und $v_2' = 12{,}5 \mp 2{,}5$ (1)

Die Alternative **nach** dem Stoß ist v_1' = 15 m/s = 54 km/h und v_2' = 10 m/s =36 km/h (1)

b) Impulserhaltung. $mv_1 + mv_2 = 2mv' \Rightarrow v'$ = 12,5 m/s = 45 km/h (1)

c) $\frac{E_{kin} - E_{kin}'}{E_{kin}} = 1 - \frac{E_{kin}'}{E_{kin}} = 1 - \frac{2v'^2}{v_1^2 + v_2^2} = 1 - \frac{312{,}5}{325} = 3{,}8\ \%$ (1)

Aufgabe 7: Teilelastischer Stoß

Ein 1 kg schwerer Wagen prallt **teilelastisch** mit 5 m/s auf zwei gekoppelte, jeweils gleich schwere ruhende Wagen.

a) Wie schnell und in welche Richtung bewegt sich der erste Wagen nach dem Stoss, wenn die anderen beiden mit 3 m/s wegfahren?
b) Wieviel Prozent der Bewegungsenergie werden in Verformungsenergie umgewandelt?

Lösungen: (alles in SI)

a) Impulserhaltung: $1\cdot 5 = 1\cdot v + 2\cdot 3 \Rightarrow \underline{v = -1\text{ m/s}}$ (1)

b) Energieerhaltung: $\frac{1}{2}\,1\cdot 5^2 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-1)^2 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3^2 + Q \Rightarrow 12{,}5 = 0{,}5 + 9 + Q \Rightarrow \underline{Q = 3\text{ J}}$ (2)

Aufgabe 8: Teilelastischer Stoß (10)

Ein 50 g schwerer Wagen prallt mit 1 m/s auf einen 400 g schweren ruhenden Wagen. Wie schnell sind die Wagen nach dem Stoß

a) im elastischen Fall? (4)
b) Im teilelastische Fall, wenn 30% der Bewegungsenergie in Wärme umgewandelt werden? (4)
c) im unelastischen Fall? Berechne in diesem Fall den prozentualen Energieverlust. (2)

Lösungen: (alles in g und m/s)

a) Impulserhaltung: $mv_1 + mv_2 = mv_1' + mv_2' \Rightarrow 50 = 50v_1' + 400v_2' \Leftrightarrow v_1' = 1 - 8v_2'$ (1)

Energieerhaltung: $\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 \Leftrightarrow 25 = 25v_1'^2 + 200v_2'^2 \Leftrightarrow 1 = v_1'^2 + 8v_2'^2$ (1)

Einsetzen: $1 = (1 - 8v_2')^2 + 8v_2'^2 \Leftrightarrow 0 = 72v_2'^2 - 16v_2' \Leftrightarrow 0 = v_2'(9v_2' - 2)$ (1)

$\Rightarrow$ Die Alternative **nach** dem Stoß ist $v_2' = \frac{2}{9}\,\frac{m}{s}$ und $v_1' = -\frac{7}{9}\,\frac{m}{s}$ (1)

b) Impulserhaltung. $mv_1 + mv_2 = mv_1' + mv_2' \Rightarrow 50 = 50v_1' + 400v_2' \Leftrightarrow v_1' = 1 - 8v_2'$ wie in a) (1)

Energie: $\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 + Q \Leftrightarrow 25 = 25v_1'^2 + 200v_2'^2 + 0{,}3\cdot 25 \Leftrightarrow 0 = v_1'^2 + 8v_2'^2 - 0{,}7$ (1)

Einsetzen: $0 = (1 - 8v_2')^2 + 8v_2'^2 - 0{,}7 \Leftrightarrow 0 = 72v_2'^2 - 16v_2' + 0{,}3 = v_2'^2 - \frac{2}{9}v_2' + \frac{1}{240} \Rightarrow v_2' = \frac{1}{9} \pm \sqrt{\frac{53}{6480}}$ (1)

$\Rightarrow$ Die Alternative **nach** dem Stoß ist $v_2' \approx 0{,}20 \frac{m}{s}$ und $v_1' \approx -0{,}6 \frac{m}{s}$ (1)

c) Impulserhaltung: $mv_1 + mv_2 = (m_1 + m_2)v' \Rightarrow 50 = 450v' \Leftrightarrow v' = \frac{1}{9} \frac{m}{s}$ (1)

Der Energieverlust ist $\frac{E_{kin} - E_{kin}'}{E_{kin}} = 1 - \frac{E_{kin}'}{E_{kin}} = 1 - \frac{(m_1 + m_2)v'^2}{m_1 v_1^2} = 1 - \frac{450}{81\cdot 50} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 88{,}9\ \%$ (1)

Aufgabe 9: Teilelastischer Stoß, Wärmelehre (7)

Ein 5 Tonnen schwerer Güterwagen prallt mit 36 km/h teilelastisch auf einen ruhenden 10 t schweren zweiten Wagen, wobei 20 % seiner kinetischen Energie in Wärme umgewandelt werden.

a) Wie schnell sind die beiden Wagen nach dem Stoß? (5)

b) Um wieviel Grad erwärmen sich die Puffer, wenn sie mit jeweils 5 Litern eines Öls mit der Dichte $\rho = 0{,}8\ g/cm^3$ und der spezifischen Wärmekapazität $c = 2\ J\cdot g^{-1}\cdot K^{-1}$ gefüllt sind? (2)

Lösung: alles in SI

a) Impulserhaltung: $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \Leftrightarrow 50\,000 = 5000\, v_1' + 10\,000\, v_2' \Leftrightarrow 10 = v_1' + 2v_2'$. (1)

Energieerhaltung: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + Q \Leftrightarrow 250\,000 = 2500\, v_1'^2 + 5000\, v_2'^2 + 50\,000$ (1)

$\Leftrightarrow 80 = v_1'^2 + 2v_2'^2 = (10 - 2v_2')^2 + 2v_2'^2 = 6v_2'^2 - 40v_2' + 100 \Leftrightarrow v_2'^2 - \frac{20}{3}v_2' + \frac{10}{3} = 0$ (1)

$\Rightarrow v_2' = \frac{10}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{70}$ und $v_1' = \frac{10}{3} \mp \frac{2}{3}\sqrt{70} \Rightarrow v_1' \approx -2{,}24 \frac{m}{s}$ und $v_2' \approx 6{,}12 \frac{m}{s}$. (2)

(Die alternative Lösung $v_1' \approx 8{,}91 \frac{m}{s}$ und $v_2' \approx 0{,}54 \frac{m}{s}$ beschreibt eine ebenfalls mögliche **Ausgangssituation**.)

b) $\Delta T = \frac{Q}{m\cdot c} = \frac{50\,000}{4\cdot 4\cdot 2000}\ K = 3{,}125\ K$ (2)

Aufgabe 10: Teilelastischer Stoß (6)

Frau Krause hat leider gar keine Zeit, ihr Telefongespräch zu unterbrechen und kracht daher in ihrem 1,5 t schweren SUV mit 54 km/h in den 36 km/h schnellen und 750 kg schweren Kleinwagen von Direktor Müller, der gerade versucht, seinen Exschüler Kevin auf dem Skateboard nicht zu überfahren. Die Knautschzonen der beiden Fahrzeuge absorbieren den neunten Teil der kinetischen Energie des SUV. Die restliche Energie wird auf beide Fahrzeuge verteilt, die sich nach dem Stoß wieder trennen. Kevin rettet sich mit gekonntem Hüftschwung, Frau Krause tippt reaktionsschnell auf die Nummer ihres Rechtsanwaltes und Direktor Müller ist überfordert. Mit welchen Geschwindigkeiten rollen die beiden Fahrzeuge weiter?

Lösung: (Alles in SI: Frau Krause = 1; Direktor Müller = 2)

Impulse: $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \Leftrightarrow 1\,500\cdot 15 + 750\cdot 10 = 1\,500\, v_1' + 750\, v_2' \Leftrightarrow 40 = 2\, v_1' + v_2'$. (1)

Energieerhaltung: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + Q$ mit $Q = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{9}\cdot 168\,750\ J = 18\,750\ J$

$\Leftrightarrow 168\,750 + 37\,500 = 750\, v_1'^2 + 375\, v_2'^2 + 18\,750$ (1)

$\Leftrightarrow 0 = 750v_1'^2 + 375v_2'^2 - 225\,000 \Leftrightarrow 0 = 2v_1'^2 + (40 - 2v_1')^2 - 600 = 6v_1'^2 - 160v_1' + 1000 \Leftrightarrow v_1'^2 - \frac{80}{3}v_1' + \frac{500}{3} = 0$ (2)

$\Rightarrow v_1' = \frac{40}{3} \pm \frac{10}{3}$ und $v_2' \approx \frac{40}{3} \mp \frac{20}{3} \Rightarrow v_1' = 10 \frac{m}{s}$ und $v_2' = 20 \frac{m}{s}$ (2)

(Die alternative Lösung $v_1' = 16{,}\overline{6} \frac{m}{s}$ und $v_2' = 6{,}\overline{6} \frac{m}{s}$ beschreibt eine ebenfalls mögliche **Ausgangssituation**.)

Aufgabe 11: Nicht zentraler Stoß (5)

In einer Nebelkammer kann man Stoßvorgänge von Elementarteilchen anhand der Kondenslinien beobachten, die diese Teilchen ebenso wie die Flugzeuge am Himmel hinterlassen. Im einfachsten Fall trifft ein Teilchen mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ auf ein gleichartiges ruhenden Teilchen ($\vec{v}_2 = 0$). Zeige mit Hilfe einer Skizze, dass die beiden Teilchen nach einem elastischen Stoß im Winkel von 90° auseinanderfliegen.

Lösungen:

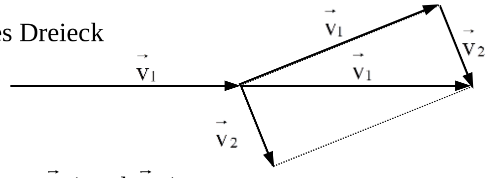
Impulserhaltung: $m\vec{v}_1 = m\vec{v}_1{}' + m\vec{v}_2{}'$ $\quad | : m$ (1)

$\Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_1{}' + \vec{v}_2{}'$

$\Rightarrow$ Die drei Geschwindigkeitsvektoren bilden ein geschlossenes Dreieck (1)

Energieerhaltung $\frac{1}{2}m\cdot v_1^2 = \frac{1}{2}m\cdot v_1'^2 + \frac{1}{2}m\cdot v_2'^2$ $\quad | : m$ (1)

$\Leftrightarrow \quad v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$

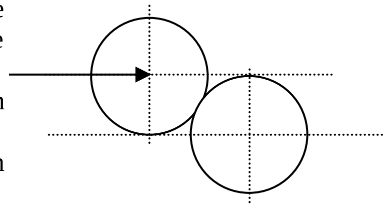


$\Rightarrow$ Das Dreieck ist rechtwinklig mit Hypotenuse $\vec{v}_1$ und Katheten $\vec{v}_1{}'$ und $\vec{v}_2{}'$. (1)

Beschriftete Skizze: (1)

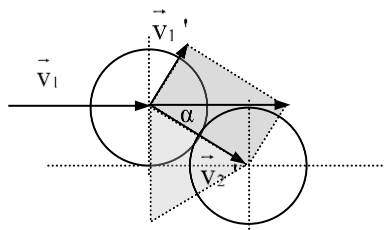
Aufgabe 12a: Nicht zentraler Stoß (6)

Eine Billardkugel trifft mit 1 m/s reibungsfrei eine zweite gleich schwere Kugel, die um den halben Kugeldurchmesser versetzt zur Bewegungsrichtung ruht. (siehe Skizze).



1. Zeige, dass die beiden Kugeln sich im Fall eines vollkommen elastischen Stoßes in einem rechten Winkel voneinander fortbewegen. (3)
2. Bestimme die Richtungen und Beträge der Geschwindigkeiten der Kugeln nach dem Stoß für diesen Fall. (3)

Lösung:



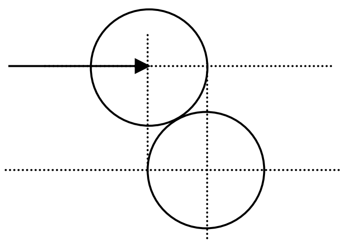
a) Siehe Skript (3)

b) Wegen der reibungsfreien Kraftübertragung wirkt die Kraft senkrecht zur Aufprallfläche. Aus dem hell schraffierten gleichseitigen Dreieck erkennt man

$\alpha = 30° \Rightarrow v_1' = v_1\cdot\sin(\alpha) = \frac{1}{2}v_1$ und $v_2' = v_1\cdot\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,v_1$. (3)

Aufgabe 12b: Nicht zentraler Stoß (6)

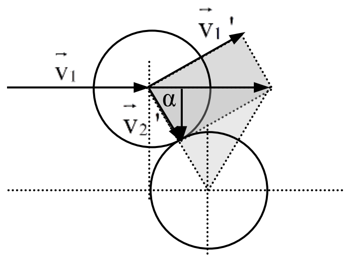
Eine Billardkugel trifft mit 1 m/s reibungsfrei eine zweite gleich schwere Kugel, welche versetzt zur Bewegungsrichtung ruht, so dass die Mittelpunkte der beiden Kugeln beim Aufprall in Bewegungsrichtung genau um den halben Durchmesser voneinander entfernt sind. (siehe Skizze).



a) Zeige, dass die beiden Kugeln sich im Fall eines vollkommen elastischen Stosses in einem rechten Winkel voneinander fortbewegen. (3)

b) Bestimme die Richtungen und Beträge der Geschwindigkeiten der Kugeln nach dem Stoss für diesen Fall. (3)

Lösung:



a) Siehe Skript (3)

b) Wegen der reibungsfreien Kraftübertragung wirkt die Kraft senkrecht zur Aufprallfläche. Aus dem hell schraffierten gleichseitigen Dreieck erkennt man

$\alpha = 30° \Rightarrow v_1' = v_1\cdot\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,v_1$ und $v_2' = v_1\cdot\cos(\alpha) = \frac{1}{2}v_1$. (3)

Aufgabe 12c: Nicht zentraler Stoß (6)

Eine 5 cm dicke Billiardkugel trifft vollelastisch und reibungsfrei (!) um x = 3 cm versetzt mit 0,5 m/s auf eine zweite ruhenden Kugel mit gleicher Größe und Masse.

a) Zeige, dass die Geschwindigkeitsvektoren der Kugeln nach dem Stoß mit dem ursprünglichen Geschwindigkeitsvektor des ersten Balls ein geschlossenes Dreieck bilden und dass dieses Dreieck rechtwinklig ist.

b) In welcher Geschwindigkeit prallen die beiden Kugeln auseinander und wie groß ist jeweils der Ablenkungswinkel zur ursprünglichen Bewegungsrichtung der ersten Kugel?

Lösungen (6):

a) siehe Skript mit

Impulserhaltung $\Rightarrow$ die Geschwindigkeitsvektoren bilden ein geschlossenes Dreieck (1)

Energieerhaltung $\Rightarrow$ das Dreieck ist rechtwinklig (1)

Beschriftete Skizze (1)

b) Der zweite Ball wird abgelenkt um $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{x}{d}\right) \approx 36{,}9°$ und rollt mit $v_2' = v_1\cdot\cos(\alpha) = 0{,}4$ m/s weiter. (2)

Der erste Ball wird abgelenkt mit $\beta = 90° - \alpha \approx 53{,}1°$ und rollt mit $v_1' = v_1\cdot\sin(\alpha) = 0{,}3$ m/s weiter. (1)

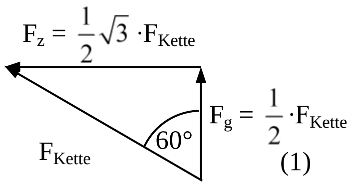
Aufgabe 13: Kreisbewegung, Energie, nicht zentraler Stoß (15)

Hannah macht mit ihrem Stoffhasen Heinz eine Fahrt in einem Kettenkarussell. Die 4 m langen Ketten hängen an einer Scheibe mit einem Durchmesser von 6 m und sind bei voller Fahrt um 60° zur Vertikalen nach aussen gerichtet. Die Scheibe sitzt 5 m über dem Boden.

a) Berechne die Winkelgeschwindigkeit des Karussells. (2)
b) Wie schnell ist Hannah? (1)
c) Welche Kräfte wirken auf jede der vier Ketten von Hannahs Sitz, wenn alles zusammen 50 kg wiegt? (1)
d) Beschreibe Form und Lage der Bahn, auf der sich Hannah bewegt. (1)
e) Wie hoch schwebt Hannah über dem Boden? (1)
f) Hannah winkt ihrer Freundin Katrin und stösst dabei aus Versehen Heinz von ihrem Schoss. Zeige, dass Heinz nach ca. 0,77 Sekunden auf dem Boden landen würde. (1)
g) Wie weit flöge Heinz in diesen 0,77 Sekunden? (1)
h) In welcher Entfernung von der Achse des Karussells würde Heinz auf dem Boden landen? (2)
i) Heinz landet aber nicht auf dem Boden, sondern auf einem Biertisch, wo er die beiden fast vollen, ebenso schweren Coladosen von Hannahs Brüdern so trifft, dass sie beide im Winkel von 30° zu seiner Flugrichtung vom Tisch gekegelt werden. Wie viel Prozent seiner kinetischen Energie muss er dabei mit seinem eigenen Körper absorbieren, wenn er selbst dabei genau vor den beiden Brüdern auf dem Tisch stehen bleibt? (5)

Lösungen:

a) Aus $\sqrt{3}\cdot F_g = F_z \Leftrightarrow \sqrt{3}\cdot g = \omega^2 r$ folgt $\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{3}\cdot g}{r}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}\cdot 10\text{ m/s}^2}{3\text{ m}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 4\text{ m}}} \approx 1{,}64$ rad/s (2)



b) $v = \omega\cdot r = \sqrt{\sqrt{3}\cdot g\cdot r} = \sqrt{\sqrt{3}\cdot 10\text{ m/s}^2\cdot(3\text{ m}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 4\text{ m})} \approx 10{,}58$ m/s (1)

c) $F_{Kette} = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot F_g = \frac{1}{2}\cdot 50\text{ kg}\cdot 10\text{ m/s}^2 = 250\text{ N}$. (1)

d) Hannah bewegt sich in einer ebenen Kreisbahn mit dem Radius $R = 3\text{ m} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 4\text{ m} \approx 6{,}46$ m. (1)

e) $h = 5\text{ m} - \frac{1}{2}\cdot 4\text{ m} = 3$ m. (1)

f) Aus $h = \frac{1}{2}gt^2$ folgt die Fallzeit $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx \sqrt{0{,}6}\text{ s} \approx 0{,}77$ s. (1)

g) Heinz fliegt $s = v\cdot t = 8{,}2$ m weit. (1)

h) Er landet in der Entfernung $d = \sqrt{s^2+R^2} \approx 10{,}44$ m von der Karussellachse. (2)

i) Heinz trifft mit der Geschwindigkeit v und der Masse m die ruhenden Coladosen mit der Masse von jeweils m. Wegen der Impulserhaltung und da Heinz nach dem Stoss in Ruhe ist, haben die beiden Coladosen dann eine Geschwindigkeitskomponente in Heinz‘ Bewegungsrichtung von $\frac{v}{2}$. (1)

Da sie im Winkel von 30° auseinanderprallen, kommt senkrecht dazu noch jeweils die Komponente $\frac{v}{2\sqrt{3}}$ hinzu.(1)

Die kinetische Energie der Coladosen ist dann $E_{kinCola} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\left(\frac{v}{2}\right)^2+\left(\frac{v}{2\sqrt{3}}\right)^2\right) = m\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)v^2 = \frac{1}{3}mv^2$. (1)

Heinz‘ kinetische Energie war $E_{kinHeinz} = \frac{1}{2}mv^2$. (1)

Der absorbierte Anteil ist $\frac{E_{kinHeinz} . E_{kinCola}}{E_{kinHeinz}} = \frac{1/2-1/3}{1/2} = \frac{1}{3} = 33{,}3\ \%$. (1)

Aufgabe 14: Nicht zentraler Stoß (10)

Eine 100 g schwere Kugel prallt mit 1 m/s so gegen eine ruhende, **doppelt so schwere** zweite Kugel, dass diese im Winkel von 30° zur Bewegungsrichtung der ersten Kugel weg rollt. Wie schnell rollen die beiden Kugeln nach dem Stoß? Um wie viel Grad wird die erste Kugel aus ihrer Bewegungsrichtung abgelenkt?

Lösungen: (alles in SI)
Impulserhaltung in x-Richtung = Bewegungsrichtung der Kugel vor dem Stoß:

$m_1v_{1x} + m_2v_{2x} = m_1v_{1x}' + m_2v_{2x}' \Leftrightarrow 100 = 100v_{1x}' + 200\, v_{2x}' \Leftrightarrow \boxed{1 = v_{1x}' + 2v_{2x}'}$ (1)

Impulserhaltung in y-Richtung = senkrecht zur Bewegungsrichtung der Kugel vor dem Stoß:

$m_1v_{1y} + m_2v_{2y} = m_1v_{1y}' + m_2v_{2y}' \Leftrightarrow 0 = 100v_{1y}' + 200\, v_{2y}' \Leftrightarrow \boxed{0 = v_{1y}' + 2v_{2y}'}$ (1)

Energieerhaltung: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \Leftrightarrow 50 = 50v_1'^2 + 100\, v_2'^2 \Leftrightarrow \boxed{1 = v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2 + 2v_{2x}'^2 + 2v_{2y}'^2}$ (1)

Aus der gegebenen Bewegungsrichtung folgt $\boxed{v_{2x}' = \sqrt{3}\, v_{2y}'}$ (1)

Durch Einsetzen der beiden Impulsbilanzen erhält man aus der Energiebilanz zunächst

$1 = (1 - 2v_{2x}')^2 + (-2v_{2y}')^2 + 2v_{2x}'^2 + 2v_{2y}'^2 \Leftrightarrow 0 = 3v_{2x}'^2 - 2v_{2x}' + 4v_{2y}'^2$ (1)

Durch Einsetzen der Richtungsverhältnisses ergibt sich weiter

$0 = 9v_{2y}'^2 - 2\sqrt{3}\, v_{2y}' + 4v_{2y}'^2 \Leftrightarrow 0 = 13v_{2y}'^2 - 2\sqrt{3}\, v_{2y}' \Leftrightarrow \boxed{0 = 13v_{2y}'(v_{2y}' - \frac{2\sqrt{3}}{13})}$ (1)

Die Einzelkomponenten sind also

$\boxed{v_{2y}' = \frac{2\sqrt{3}}{13}}$; $\boxed{v_{2x}' = \sqrt{3}\, v_{2y}' = \frac{6}{13}}$; $\boxed{v_{1x}' = 1 - 2v_{2x}' = 1 - \frac{4\sqrt{3}}{13}}$ und $\boxed{v_{1y}' = -2v_{2y}' = -\frac{12}{13}}$ (2)

Die Beträge sind $v_1' = \sqrt{v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2} \approx 0{,}657\ \frac{m}{s}$ und $v_2' = \sqrt{v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2} \approx 0{,}961\ \frac{m}{s}$ (1)

Die 1. Kugel ist um $\alpha = \arctan\left(\frac{v_{1y}'}{v_{1x}'}\right) = -63{,}16°$ zur ursprünglichen Bewegungsrichtung abgelenkt. (1)