1.6. Impulserhaltung

1.6.1. Der Impuls

Beladenen Wagen langsam, unbeladenen Wagen schnell mit Feder (elastisch!) auf zweiten Wagen prallen lassen

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{Impuls} = \textbf{Masse mal Geschwindigkeit}\\ \vec{p} = m \cdot \vec{v}\end{array}}$$

Wegen $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

bzw. $m\cdot\vec{a} = m\cdot\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

gilt

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{Kraft} = \textbf{Impulsänderung pro Zeit}\\ \vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}\end{array}}$$

bzw.

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{Kraftstoß} = \textbf{Impulsänderung}\\ \vec{F}\cdot\Delta t = \Delta\vec{p}\end{array}}$$

Einheit: $[p] = kg\cdot\frac{m}{s} = N\cdot s$

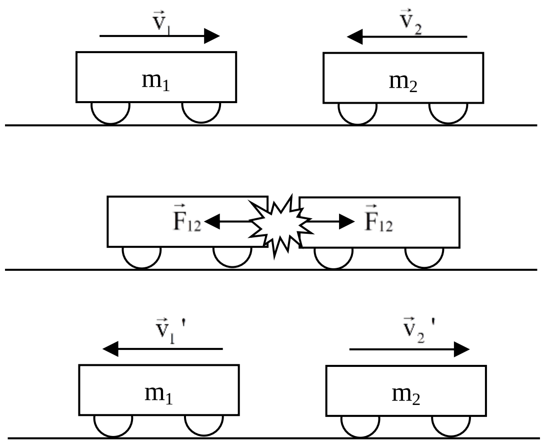
Übungen: Aufgaben zur Impulserhaltung Nr. 1

1.6.2. Der Impulserhaltungssatz

Zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 prallen mit den Geschwindigkeiten $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ aufeinander. Beim Aufprall übt Körper 2 während der Zeit Δt die Kraft $\vec{F}_{21}$ auf Körper 1 aus. Dieser wirkt umgekehrt mit der entgegengesetzt gleichen Kraft $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ auf Körper 1. Durch den Kraftstoß $\vec{F}_{12}\cdot\Delta t = -\vec{F}_{21}\cdot\Delta t$ wird ein Impuls $m_1\cdot(\vec{v}_1\,'-\vec{v}_1) = -m_2\cdot(\vec{v}_2\,'-\vec{v}_2)$ von einem Körper auf den anderen übertragen. $\vec{v}_1\,'$ und $\vec{v}_2\,'$ sind die Geschwindigkeiten der beiden Körper nach dem Stoß. Der Gesamtimpuls der beiden Körper ändert sich nicht, solange von außen keine zusätzlichen Kräfte bzw. Kraftstöße auf die beiden Körper wirken.

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{12} &= -\vec{F}_{21} && |\cdot\Delta t\\
\vec{F}_{12}\cdot\Delta t &= -\vec{F}_{21}\cdot\Delta t && |\ \vec{F}\cdot\Delta t = m\cdot\Delta\vec{v}\\
m_1\cdot(\vec{v}_1\,'-\vec{v}_1) &= -m_2\cdot(\vec{v}_2\,'-\vec{v}_2) && |\ \text{ausmultiplizieren}\\
m_1\cdot\vec{v}_1\,'-m_1\cdot\vec{v}_1 &= -m_2\cdot\vec{v}_2\,'+m_2\cdot\vec{v}_2 && |\ +m_2\cdot\vec{v}_2\,'+m_1\cdot\vec{v}_1\\
m_1\cdot\vec{v}_1\,'+m_2\cdot\vec{v}_2\,' &= m_1\cdot\vec{v}_1+m_2\cdot\vec{v}_2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{p}_1\,' + \vec{p}_2\,' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2}$$



Diese Erkenntnis gilt natürlich auch für mehr als zwei Körper:

Impulserhaltungssatz:
Wenn von **außen** keine Kraftstöße auf ein System wirken, bleibt der Gesamtimpuls des Systems unverändert:

$$\boxed{\Sigma\vec{p}_{\text{vorher}} = \Sigma\vec{p}_{\text{nachher}}\,.}$$

Übungen: Aufgaben zur Impulserhaltung Nr. 2

1.6.3. Der zentrale Stoß

Beim zentralen Stoß bewegen sich die Körper auf einer **gemeinsamen Achse** oder Schiene. Die Bewegung ist also **eindimensional** und man kann die Vektorpfeile weglassen. Um die beiden Geschwindigkeiten v_1' und v_2' der Körper nach dem Stoß berechnen zu können, benötigt man **zwei Gleichungen**. Neben dem Impulserhaltungssatz nutzt man noch den **Energieerhaltungssatz**. Dabei unterscheidet man

1. **Elastische Stöße**: Die kinetische Energie bleibt vollständig erhalten:
   $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$.
2. **Teilelastische Stöße**: Ein Teil der kinetischen Energie wird über Verformungsarbeit W in Wärme umgewandelt:
   $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + W$. Die Verformungsarbeit muss dann ebenfalls gegeben sein.
3. **Unelastische Stöße**: Die abgegebene Verformungsarbeit ist W maximal und die Körper bleiben nach dem Stoß aneinander haften, so dass $v_1' = v_2'$. In diesem Fall benötigt man nur eine Gleichung und kann auf den Energieerhaltungssatz verzichten.

Beispiel:
Der m_1 = 100 g schwere Wagen 1 prallt mit v_1 = 2 m/s auf den m_2 = 300 g schweren Wagen 2, der ihm mit v_2 = −1 m/s entgegen kommt. Berechne die Geschwindigkeiten v_1' und v_2' nach dem Stoß für die folgenden Fälle:
a) Elastischer Stoß
b) Teilelastischer Stoß, bei dem 20 % der gesamten kinetischen Energie in Wärme umgewandelt wird.
c) Unelastischer Stoß. Berechne für diesen Fall auch den prozentualen Anteil des Wärmeverlustes.

Lösungen für Teil a): (alles in SI)

Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1v_1' + m_2v_2' && |\text{ Einsetzen} \\ \Rightarrow 0{,}1\cdot 2 + 0{,}3\cdot(-1) &= 0{,}1\cdot v_1' + 0{,}3\cdot v_2' && |\cdot 10 \\ -1 &= v_1' + 3v_2' && |-3v_2' \\ -1 - 3v_2' &= v_1'. \end{aligned}$$

Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 && |\text{ Einsetzen} \\ 0{,}05\cdot 4 + 0{,}15\cdot 1 &= 0{,}05\cdot v_1'^2 + 0{,}15\cdot v_2'^2 && |\cdot 20 \\ 7 &= v_1'^2 + 3v_2'^2 && |\text{ Impulsbilanz einsetzen} \\ 7 &= (1 + 3v_2')^2 + 3v_2'^2 && |\text{ Klammer auflösen; } -7 \\ 0 &= 12v_2'^2 + 6v_2' - 6 && |:12 \\ 0 &= v_2'^2 + \frac{1}{2}v_2' - \frac{1}{2} && |\text{ p-q-Formel} \\ v_2' &= -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Die **eine** Lösung $v_2' = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ = 0,5 m/s ist die Geschwindigkeit **nach** dem Stoß

Die **andere** Lösung $v_2' = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}$ = −1 m/s ist die Geschwindigkeit **vor** dem Stoß

Durch Einsetzen erhält man $v_1' = -1 - 3v_2' = -2{,}5$ m/s.

Lösungen für Teil b): (alles in SI)

Impulserhaltung: (siehe a)) $\quad -1 - 3v_2' = v_1'$.

Energieerhaltung: $\quad \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + W \qquad$ | Einsetzen

$$
\begin{aligned}
0{,}35 &= 0{,}05\cdot v_1'^2 + 0{,}15\cdot v_2'^2 + \frac{20}{100}\cdot 0{,}35 && |\cdot 100; -7\\
28 &= 5v_1'^2 + 15v_2'^2 && |\text{ Impulsbilanz einsetzen}\\
28 &= 5\cdot(1 + 3v_2')^2 + 15v_2'^2 && |\text{ Klammer auflösen; } -7\\
0 &= 60v_2'^2 + 30v_2' - 23 && |:60\\
0 &= v_2'^2 + \frac{1}{2}v_2' - \frac{23}{60} && |\text{ p-q-Formel}\\
v_2' &= -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{60}}\\
&\approx -0{,}25 \pm 0{,}67
\end{aligned}
$$

Die **eine** Lösung $v_2' \approx -0{,}25 + 0{,}67 = 0{,}42$ m/s ist die Geschwindigkeit **nach** dem Stoß mit 20 % Energieverlust
Die **andere** Lösung $v_2' = -0{,}25 - 0{,}67 = -0{,}93$ m/s ist die Geschwindigkeit **vor** dem Stoß mit 20 % Energieverlust.

Durch Einsetzen erhält man $v_1' = -1 - 3v_2' = -2{,}25$ m/s.

Lösungen für Teil c): (alles in SI)

Impulserhaltung:

$$
\begin{aligned}
m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1v' + m_2v' && |\text{ Einsetzen}\\
\Rightarrow 0{,}1\cdot 2 + 0{,}3\cdot(-1) &= 0{,}1\cdot v' + 0{,}3\cdot v' && |\cdot 10\\
-1 &= v' + 3v' && |:4\\
-0{,}25 \text{ m/s} &= v'.
\end{aligned}
$$

Energieerhaltung:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1v'^2 + \frac{1}{2}m_2v'^2 + W && |\text{ Einsetzen}\\
0{,}35 &= 0{,}0125 + W && |: 0{,}35;\ \cdot 100\\
100\ \% &= 3{,}6\ \% + 96{,}4\ \%\\
E_{kin} &= \quad E_{kin}' \quad + W
\end{aligned}
$$

Die beiden Wagen wandeln 96,4 % ihrer kinetischen Energie in Wärme um und fahren mit der gemeinsamen Geschwindigkeit $v' = -0{,}25$ m/s in negative Richtung weiter.

Übungen: Aufgaben zur Impulserhaltung Nr. 3

1.6.4. Der nicht zentrale Stoß

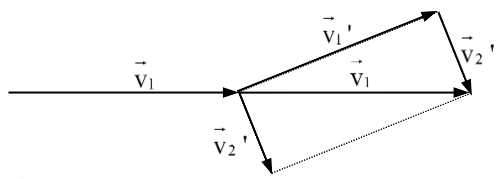
Wenn ein Körper schiefwinklig auf einen anderen stößt, sind nicht nur die Beträge, sondern auch die Richtungen der Geschwindigkeiten nach dem Stoß gefragt und man benötigt zwei weitere Gleichungen. Diese erhält man im Allgemeinen durch y- und z-Komponente der vektoriellen Impulsbilanz. Man kann auf diese Weise z.B. ausrechnen, in welche Richtungen und mit welchen Geschwindigkeiten zwei **Tennisbälle** auseinander fliegen, die in der Luft kollidiert sind.

Viel einfacher und von wesentlich größerem Interesse ist das **Billiardspiel**: Eine Kugel trifft mit dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_1$ auf eine gleich schwere ruhende Kugel. Gefragt sind die Vektoren, $\vec{v}_1\,'$ und $\vec{v}_2\,'$, mit der die beiden Kugeln auseinander rollen. Dieser Spezialfall lässt sich erstaunlich einfach geometrisch lösen und soll daher kurz behandelt werden. Zunächst zeigen wir, dass die Kugeln **immer in einem Winkel von 90° auseinander rollen**:

Impulserhaltung: $\quad m\vec{v}_1 = m\vec{v}_1\,' + m\vec{v}_2\,' \qquad |:m$

$\Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_1\,' + \vec{v}_2\,'$

$\Rightarrow$ Die drei Geschwindigkeitsvektoren bilden ein **geschlossenes Dreieck**

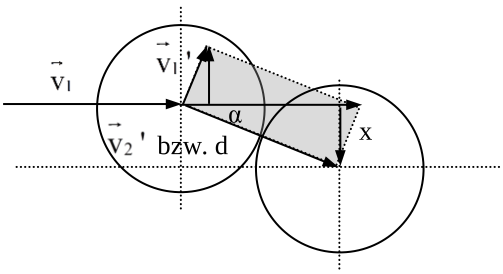


Energieerhaltung $\quad \frac{1}{2}m\cdot v_1^2 = \frac{1}{2}m\cdot v_1'^2 + \frac{1}{2}m\cdot v_2'^2 \qquad |: \frac{1}{2}m$

$\Leftrightarrow \quad v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$

$\Rightarrow$ Das Dreieck ist **rechtwinklig** mit Hypotenuse $\vec{v}_1$ und Katheten $\vec{v}_1\,'$ und $\vec{v}_2\,'$.

In einem rechtwinkligen Dreieck mit gegebener Hypotenuse bzw. Aufprallgeschwindigkeit $\vec{v}_1$ genügt aber schon eine einzige weitere Bedingung, um alle weiteren Größen komplett zu bestimmen. Wenn die Kugeln den Radius r haben, ist in der Regel die Abweichung x von der Zentrallinie ebenfalls bekannt.



Aus der Abbildung rechts ergibt sich der Zusammenhang $\sin(\alpha) = \frac{x}{d}$ bzw. $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{x}{d}\right)$ für den Ablenkwinkel α.

Die Beträge der Geschwindigkeiten nach dem Stoß sind entsprechend $v_1' = v_1 \cdot \cos(\alpha)$ und $v_2' = v_1 \cdot \sin(\alpha)$.

Übungen: Aufgaben zur Impulserhaltung Nr. 4 und 5