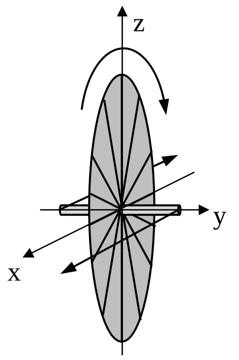
1.7. Aufgaben zur Drehimpulserhaltung

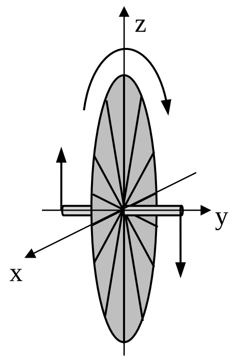
Aufgabe 1: Drehimpuls
Eine 30 g schwere Kugel wird an einem 20 cm langen Faden zweimal pro Sekunde im Kreis herumgeschleudert.
a) Berechne die Bahngeschwindigkeit und den Bahndrehimpuls der Kugel.
b) Der Faden wird auf 10 cm verkürzt. Wie schnell ist die Kugel und wie viele Umläufe pro Sekunde schafft sie jetzt?

Aufgabe 2: Drehimpuls
Jesse und Anton fahren auf ihren Fahrrädern mit 36 km/h nebeneinander her. Anton hat ein Tourenrad mit 980 g schweren und 70 cm großen 28-Zoll-Felgen; Jesse dagegen ein Mountainbike mit 910 g schweren und 65 cm großen 26-Zoll-Felge. Berechne jeweils die Drehimpulse der Felgen. Wer braucht mehr Kraft zum Lenken und wer kann besser freihändig fahren?

Aufgabe 3: Drehimpuls
Frank hat eine 980 g schweren und 70 cm großen 28-Zoll-Fahrradfelge ausgebaut und hält sie nun mit beiden Händen an der Achse so vor sich, dass diese auf der y-Achse liegt (siehe rechts). Mit dem Daumen greift er in 4 cm Abstand zur Achse in die Speichen und bringt die Felge in 5 Sekunden so in Schwung, dass sie 3 Umdrehungen pro Sekunde schafft.



a) Wie groß ist der Drehimpuls der Felge?
b) Wie groß war das erforderliche Drehmoment, wenn man gleichmässige Beschleunigung voraussetzt?
c) Welche Kraft hat der Daumen auf die Speichen ausgeübt?
d) Frank will nun die wie skizziert rotierende Felge mit leichtem Zug der rechten Hand bzw. Druck der linken Hand um die senkrechte z-Achse nach rechts schwenken. Die Felge kippt aber stattdessen um die x-Achse nach unten. Zeichne die Richtung des Drehimpulses $\vec{L}$ sowie des durch die Hände ausgeübten Drehmomentes $\vec{M} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$ in die Skizze ein und begründe durch grafische Vektoraddition, wie es zu dieser unerwarteten Reaktion kommt.



e) Jetzt nimmt Frank die rechte Hand weg und balanciert die rotierende Felge nur noch auf der linken Seite. Doch statt wie erwartet um die x-Achse nach unten zu kippen, fängt sie an, sich langsam um die z-Achse zu drehen. Zeichne wieder die Richtung des Drehimpulses $\vec{L}$ sowie des durch die Schwerkraft ausgeübten Drehmomentes $\vec{M} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$ in die Skizze ein und begründe durch grafische Vektoraddition, wie es zu dieser unerwarteten Reaktion kommt

Aufgabe 4: Kreisbewegung im Gravitationsfeld
Berechne die Umlaufdauer und die Bahngeschwindigkeit der 66 Satelliten des Iridium-GPS-Systems, die die Erde auf nahezu kreisförmigen Bahnen in ca. 780 km Höhe umlaufen.

Allgemeine Angaben zu den Aufgaben 5 – 10 (Keplersche Gesetze):
- Die Erde umrundet die Sonne in einem mittleren Abstand von einer **Astronomischen Einheit** 1 AE ≈ 150 Mio km und benötig dafür ein Jahr 1 a.
- Der Mond umrundet die Erde in einem mittleren Abstand von 384 400 km und benötigt dafür 27,3 Tage.
- Der **Erdradius** ist 6370 km.

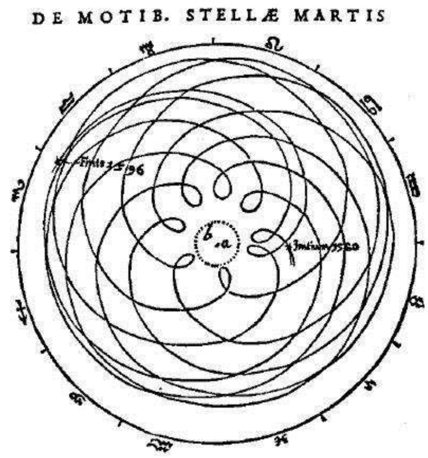
Aufgabe 5: Keplersche Gesetze
a) Welche Umlaufdauer hat ein geostationärer Satellit, der sich immer über demselben Ort auf der Erde befindet?
b) Wo muss die Umlaufbahn eines geostationären Satelliten liegen?
c) Nenne zwei Anwendungen für geostationäre Satelliten.
d) Welche Höhe muss ein geostationärer Satellit über der Erdoberfläche haben? Berechne die Höhe sowohl mit der Gravitationskraft also auch durch Vergleich mit dem Mond über das 3. Keplersche Gesetz.

Aufgabe 6: Keplersche Gesetze
a) Berechne die Umlaufdauer des Mars aus seinem mittleren Bahnradius von r’ = 1,52 AE durch Vergleich mit der Erde über das 3. Keplersche Gesetz.
b) Berechne die Bahngeschwindigkeiten von Erde und Mars in km/h

Aufgabe 7: Keplersche Gesetze

Im Perigäum hat der Mond seinen kleinsten Abstand von $3{,}57 \cdot 10^5$ km und im Apogäum seinen größten Abstand von $4{,}07 \cdot 10^5$ km zur Erde.

a) Berechne die Länge der großen Bahnachse a der Mondbahn.
b) Wie lange braucht die internationale Raumstation ISS auf ihrer näherungsweisen Kreisbahn in 335 km Höhe für eine Umrundung der Erde?



Aufgabe 8: Keplersche Gesetze

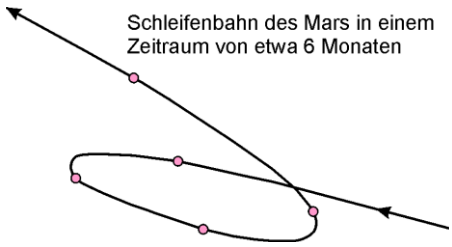
Der Pluto bewegt sich im mittleren Abstand von 39,5 AE mit der numerischen Exzentrizität $\varepsilon = 0{,}249$ um die Sonne.

a) Berechne seine kleinste (Perihel) und größte (Aphel) Entfernung zur Sonne
b) Wie lange braucht der Pluto für einen Umlauf?

Aufgabe 9: Keplersche Gesetze

Johannes Kepler brauchte 40 Versuche und ca. 5 Jahre (u.a. mit eiförmigen Umlaufbahnen), um die von der Erde aus beobachteten Marsbahnen schließlich mit einfachen Ellipsen erklären zu können. Ellipsenbahnen hatte er zunächst in seinen Untersuchungen nicht berücksichtigt, weil er davon überzeugt war, dass solche einfachen und offensichtlichen Lösungen sicher schon lange vor ihm untersucht worden waren.

Erkläre mit Hilfe einer Skizze das Zustandekommen der typischen Schleifenbahnen, die man für den Mars von der Erde aus beobachtet. Der Mars bewegt sich im mittleren Abstand von 1,52 AE mit einer Umlaufdauer von 1,88 a um die Sonne. Seine Bahn ist wie die der Erde nahezu kreisförmig mit einer sehr kleinen numerischen Exzentrizität.


Schleifenbahn des Mars in einem Zeitraum von etwa 6 Monaten

Aufgabe 10: Keplersche Gesetze

Der Komet Tempel-Tuttle umrundet die Sonne auf einer elliptischen Bahn in einer Zeit von 33,24 Jahren. Seine kleinste Entfernung zur Sonne (Perihel) beträgt 0,976 AE.

a) Berechne die Exzentrizität und die große Halbachse der Kometenbahn in AE
b) Berechne die größte Entfernung zur Sonne (Aphel) in AE

Aufgabe 11: Translation und Rotation

a) Zeige, dass für die in der Zeit Δt zurückgelegte Wegstrecke Δs gilt: $\Delta s = v \cdot \Delta t$ bei konstanter Geschwindigkeit v und $\Delta s = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$ bei konstanter Beschleunigung a aus dem Stand.
b) Zeige entsprechend zu a), dass für die in der Zeit Δt überstrichenen Winkel $\Delta\varphi$ gilt: $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$ bei konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und $\Delta\varphi = \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2$ bei konstanter Winkelbeschleunigung α aus der Ruhelage.

Aufgabe 12: Trägheitsmoment

Ein Schwungrad rotiert mit der Frequenz $f = 20\ s^{-1}$ um seine Symmetrieachse. Bezüglich dieser Achse hat es das Trägheitsmoment $J = 60\ kg \cdot m^2$. Nun wird das Schwungrad in der Zeitspanne von $\Delta t = 1$ min durch ein konstantes Drehmoment M bis zum Stillstand abgebremst.

a) Berechne das Bremsdrehmoment M
b) Berechne die durchschnittliche Leistung $\overline{P}$, die während des Bremsvorganges abgegeben wird.
c) Berechne die Anzahl der Umdrehungen, die das Schwungrad im Laufe des Bremsvorganges ausgeführt hat.

Aufgabe 13: Trägheitsmoment

Berechne jeweils die Winkelgeschwindigkeit ω, die Translationsenergie E_{trans}, die Rotationsenergie E_{rot} und die gesamte kinetische Energie $E_{kin} = E_{trans} + E_{rot}$ der drei folgenden Körper mit der Masse m, wenn sie mit der Geschwindigkeit v auf einer horizontalen Ebene rollen:

Körper	J	ω	E_{trans}	E_{rot}	E_{kin}
Hohlzylinder	mr^2				
Zylinder	$\frac{1}{2} mr^2$				
Kugel	$\frac{2}{5} mr^2$				

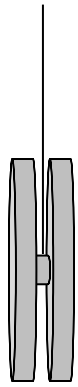
Aufgabe 14: Trägheitsmoment

Max und Lisa helfen ihrem Vater beim Reifenwechsel. Sie haben ein paar Bretter auf eine 1 m hohe Gartenmauer gelehnt, wuchten die Reifen dort hinauf und lassen sie über die schiefe Ebene wieder hinunterrollen, damit der Vater sie auffangen kann, bevor sie ins Auto krachen. Lisa nimmt 10 kg schwere Reifen mit Innenradius r_1 = 27 cm und Außendurchmesser r_2 = 35 cm ohne Felge, während der starke Max die gleichen Reifen auf 6 kg schweren Felgen nimmt. Die Reifen können als dicke Hohlzylinder mit Trägheitsmoment $J = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$ betrachtet werden. Reifen mit Felgen werden als Zylinder mit $J = \frac{1}{2}mr^2$ angenähert. Rechne mit g = 10 m/s^2.

a) Berechne die gesamte kinetische Energie $E_{kin} = E_{rot} + E_{trans}$ der Reifen mit und ohne Felge in Abhängigkeit von ihrer Geschwindigkeit v.
b) Wie schnell sind die Reifen mit und ohne Felge am Fuß der 1 m hohen schiefen Ebene?

Aufgabe 15: Trägheitsmoment

Ein JoJo besteht aus zwei 5 mm dicken Schwungscheiben aus Stahl mit dem Radius r_2 = 4 cm, die im Abstand von 5 mm auf einer Achse aus dem gleichen Material mit den Radius r_1 = 4 mm sitzen. An dieser Achse ist zwischen den beiden Schwungscheiben der Faden befestigt. Stahl hat die Dichte r = 7,8 g/cm^3.



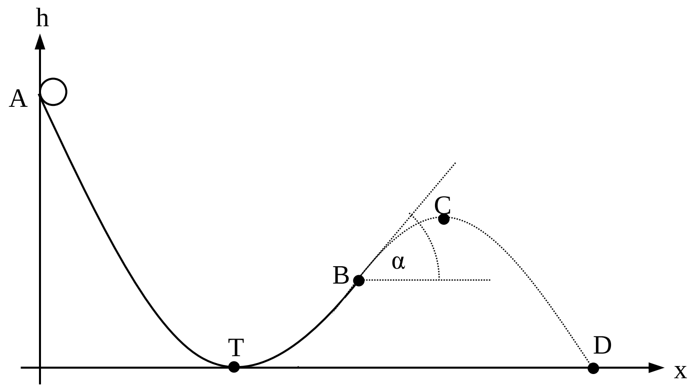
a) Berechne die Masse m und das Trägheitsmoment J des JoJos. Der mittlere Abschnitt der Achse kann vernachlässigt werden.
b) Berechne die gesamte kinetische Energie $E_{kin} = E_{rot} + E_{trans}$ des JoJos, wenn es beim Abrollen die Sinkgeschwindigkeit v erreicht hat.
c) Berechne die gesamte kinetische Energie aus b) in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit ω.
d) Wie viel Prozent der Gesamtenergie wird durch die Translation bewirkt?
e) Welche Winkelgeschwindigkeit und welche Sinkgeschwindigkeit v hat das JoJo, wenn es um eine Höhe von 50 cm abgesunken ist? Rechne mit g = 10 m/s^2 und vernachlässige die Translationsenergie.

Aufgabe 16: Trägheitsmoment

Auf einem Drehstuhl sitzt ein Schüler mit zwei 1 kg schweren Hantel, die er dicht an seinem Körper mit dem Abstand r_1 = 10 cm von der Drehachse hält. nun wird der Schüler in Rotation mit einer Umdrehung pro Sekunde versetzt. Er streckt die Arme aus, so dass die Hanteln nun einen Abstand von r_2 = 70 cm von der Drehachse haben, wodurch sich seine Drehfrequenz auf 3 Umdrehungen in 4 Sekunden verringert. Berechne das Trägheitsmoment J_S des Schülers. Die Änderung seines Trägheitsmoments durch das Ausstrecken der Arme kann vernachlässigt werden.

Aufgabe 17: Rotation und schiefer Wurf (10)

Eine **Kugel** mit Radius r und Masse m rollt wie rechts skizziert aus der Ruhe im Punkt A mit der Höhe h_A = 2,25 m eine gebogene Rinne hinunter.
Der Tiefpunkt T der Rinne wird auf der Höhe h_T = 0 m mit der Bahngeschwindigkeit v_T durchlaufen. Im Punkt B verlässt sie die Rinne in der Höhe h_B = 0,8 m im Winkel von α = 55° zur Horizontalen mit der Bahngeschwindigkeit v_B.
Sie erreicht den höchsten Punkt C der Flugbahn in der Höhe h_C mit der Bahngeschwindigkeit v_C.
Im Punkt D mit h_D = 0 landet die Kugel mit der Bahngeschwindigkeit v_D.



a) Berechne die Bahngeschwindigkeit v_T. Berücksichtige auch die Rotationsenergie der Kugel. (2)
b) Berechne die Bahngeschwindigkeit v_B. (1)
c) Berechne die Bahngeschwindigkeit v_C. (1)
d) Berechne die Höhe h_C. (2)
e) Berechne die Bahngeschwindigkeit v_D. (2)
f) Begründe ohne Rechnung nur mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes, warum v_D grösser als v_T sein muss. (2)

1.7. Lösungen zu den Aufgaben zur Drehimpulserhaltung

Aufgabe 1: Drehimpuls

a) Geschwindigkeit v = ωr = 2·π·2 s^{-1}·0,2 m = 0,8π m/s und Drehimpuls L = r·m·v = 0,0048π kg·$\frac{m^2}{s}$.

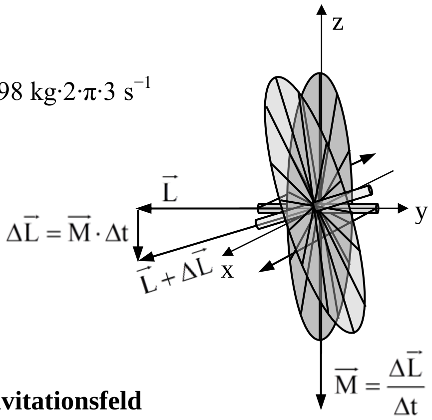
b) Der Drehimpuls bleibt gleich: L = r‘·m·v‘. Bei halbem Radius r‘ = $\frac{r}{2}$ erhält man die doppelte Geschwindigkeit v‘ = $\frac{L}{r'\cdot m}$ = 2·v = 1,6π m/s und die vierfache Umlauffrequenz ω‘ = $\frac{v'}{r'}$ = 4ω. Die Kugel schafft also nun 8 Umläufe pro Sekunde!

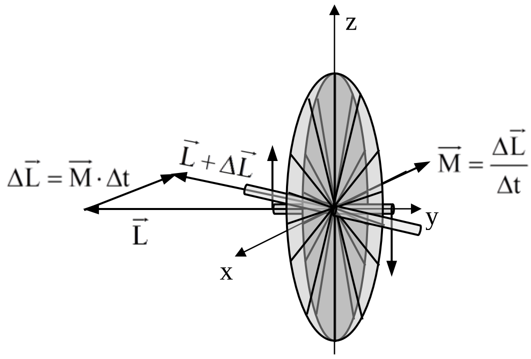
Aufgabe 2: Drehimpuls

L_{Anton} = r·m·v = 0,35 m·0,980 kg·10 m/s = 3,43 kg·$\frac{m^2}{s}$ und L_{Jesse} = r·m·v = 0,325 m·0,910 kg·10 m/s ≈ 2,96 kg·$\frac{m^2}{s}$. Der größere Drehimpuls beim 28-Zoll-Rad benötigt auch ein größeres Drehmoment zur freiwilligen oder unfreiwilligen Änderung: Anton braucht mehr Kraft zum Lenken, kann aus dem gleichen Grund aber auch besser freihändig fahren, weil das Rad stabiler ist.

Aufgabe 3: Drehimpuls

a) L = r·m·v = r^2·m·ω = $(0{,}35\ m)^2$·0,98 kg·2·π·3 s^{-1} ≈ 2,26 kg·m^2·s^{-1} = 2,26 Nm·s
b) M = $\frac{\Delta L}{\Delta t}$ ≈ 0,45 Nm
c) F_{Daumen} = $\frac{M}{r_{Daumen}}$ ≈ 11,3 N
d) siehe rechts
e) siehe ganz rechts





Aufgabe 4: Kreisbewegung im Gravitationsfeld

Die Zentripetalkraft $F_z = \frac{mv^2}{r}$ ist gleich der Gravitationskraft $F_G = \gamma\cdot\frac{M\cdot m}{r^2}$. Daraus ergibt sich die Bahngeschwindigkeit v = $\sqrt{\frac{\gamma\cdot M}{r}} \approx \sqrt{\frac{6{,}673\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}972\cdot 10^{24}}{(6390+780)\cdot 10^3}}\ \frac{m}{s} \approx 7{,}47\ \frac{km}{s}$ und Umlaufdauer T = $\frac{2\pi r}{v}$ ≈ 6030 s = 100 Minuten und 30 Sekunden.

Aufgabe 5: Keplersche Gesetze

a) 1 Tag
b) genau über dem Äquator
c) Fernsehen, Mobilfunk, Wetter, GPS
d) Aus dem 3. Keplerschen Gesetz folgt r = r’·$\left(\frac{T}{T'}\right)^{2/3}$ ≈ 42 398 km vom Erdmittelpunkt entfernt bzw. 36 027 km über der Erdoberfläche.

Aufgabe 6: Keplersche Gesetze

a) Aus dem 3. Keplerschen Gesetz folgt T’ = T·$\left(\frac{r'}{r}\right)^{3/2}$ ≈ 1,87 a.
b) Erde: v = ωr ≈ 107 228 km/h und Mars: v’ = 87 159 km(h

Aufgabe 7: Keplersche Gesetze

a) Apogäum: a + e = 3,57·10^5 km; Perigäum: a – e = 4,07·10^5 km ⇒ große Halbachse a = $\frac{1}{2}$(3,57 + 4,07)·10^5 km ≈ 3,82·10^5 km.
b) Aus dem 3. Keplerschen Gesetz folgt T’ = T·$\left(\frac{a'}{a}\right)^{3/2}$ ≈ 1,5 h.

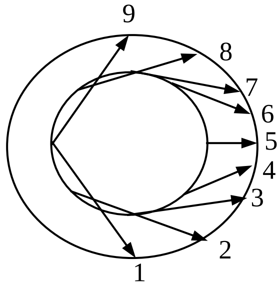
Aufgabe 8: Keplersche Gesetze

Aus a = 39,5 AE ergibt sich die Exzentrizität e = ε·a ≈ 9,8 AE und das Perihel a – e ≈ 29,7 AE und das Aphel a + e = 49,3 AE

Aus dem 3. Keplerschen Gesetz folgt T’ = T·$\left(\frac{a'}{a}\right)^{3/2}$ ≈ 248,2 a

Aufgabe 9: Keplersche Gesetze

Die Schleife entsteht beim Überholvorgang vom inneren, schnelleren Planeten aus gesehen, wenn dessen Eigendrehachse etwas zur Ellipsenebene geneigt ist. Der äußere Planet wandert von 1 – 4 nach Osten, von 5 – 6 nach Westen und von 7 – 9 wieder nach Osten. Die Skizze ist vereinfacht für eine doppelt so lange Umlaufzeit des äußeren Planeten gezeichnet. In diesem Fall würde sich nur eine einzige geschlossene Schleife ergeben.



Aufgabe 10: Keplersche Gesetze

a) Aus dem 3. Keplerschen Gesetz folgt $a' = a \cdot \left(\frac{T'}{T}\right)^{2/3} \approx 10{,}334$ AE.

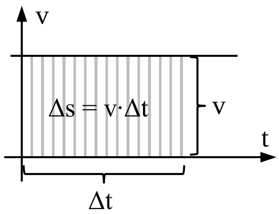
Die Exzentrizität ist also $e = \frac{1}{2}(a + e - (a - e)) \approx 4{,}681$ AE

b) Das Aphel liegt bei $a + e = 15{,}015$ AE.

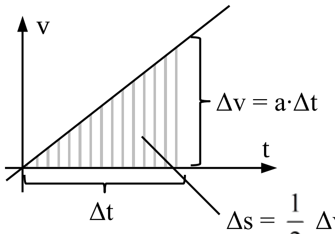
Aufgabe 11: Translation und Rotation

a) Zurückgelegte Strecken sind Flächeninhalte im v-t-Diagramm:

$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow$



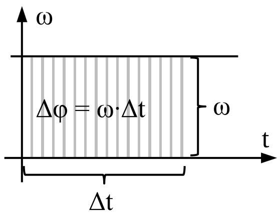
$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow$



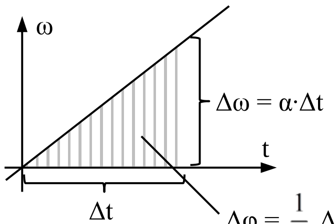
$\Delta s = \frac{1}{2}\Delta v \cdot \Delta t = \frac{1}{2} a(\Delta t)^2$

b) Überstrichene Winkel sind Flächeninhalte im ω-t-Diagramm:

$\omega = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \Rightarrow$



$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \Rightarrow$



$\Delta \varphi = \frac{1}{2}\Delta \omega \cdot \Delta t = \frac{1}{2} \alpha(\Delta t)^2$

Aufgabe 12: Trägheitsmoment

a) $M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = J \cdot \alpha = 40\pi$ Nm mit der Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 20}{60\ s^2} = \frac{2}{3}\pi\ s^{-2}$.

b) $\overline{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{J \cdot \omega^2}{2 \cdot \Delta t} = 800\pi^2$ W.

c) $\Delta \varphi = \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2 = 1200\pi$ bzw. 600 Umdrehungen.

Aufgabe 13: Trägheitsmoment

Körper	J	ω	E_{trans}	$E_{rot} = \frac{1}{2} J\omega^2$	E_{kin}
Hohlzylinder	mr^2	$\frac{v}{r}$	$\frac{1}{2} mv^2$	$\frac{1}{2} mv^2$	mv^2
Zylinder	$\frac{1}{2} mr^2$	$\frac{v}{r}$	$\frac{1}{2} mv^2$	$\frac{1}{4} mv^2$	$\frac{3}{4} mv^2$
Kugel	$\frac{2}{5} mr^2$	$\frac{v}{r}$	$\frac{1}{2} mv^2$	$\frac{1}{5} mv^2$	$\frac{7}{10} mv^2$

Aufgabe 14: Trägheitsmoment
Alles in SI!

a) Reifen ohne Felge: $\omega = \frac{v}{r_2} \Rightarrow E_{kin} = E_{trans} + E_{rot} = \frac{1}{2}m_Rv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}m_Rv^2 + \frac{1}{4}m_R\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}+1\right)v^2 = \frac{1}{4}m_R\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}+3\right)v^2 \approx 9v^2$.

Reifen mit Felge: $\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow E_{kin} = E_{trans} + E_{rot} = \frac{1}{2}m_{R+F}v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}m_{R+F}v^2 + \frac{1}{4}m_{R+F}v^2 = \frac{3}{4}m_{R+F}v^2 \approx 12v^2$.

a) Energieerhaltung: $E_{pot} + E_{kin} = E_{pot}‘ + E_{kin}‘ \Leftrightarrow E_{pot} = E_{kin}‘$:

$\Rightarrow$ Reifen ohne Felge: $m_R \cdot g \cdot h = \frac{1}{4}m_R\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}+3\right)v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot h}{\frac{r_1^2}{r_2^2}+3}} \approx 3{,}33$ m/s

$\Rightarrow$ Reifen mit Felge: $m_{R+F} \cdot g \cdot h = \frac{3}{4}m_{R+F}v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot h}{3}} \approx 3{,}65$ m/s

Aufgabe 15: Trägheitsmoment

a) Masse $m = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi r_2^2 \cdot d = 392{,}1$ g mit der gesamten Dicke d = 1 cm der beiden Scheiben.

Trägheitsmoment $J = \frac{1}{2}mr_2^2 = 992{,}4\ \text{g}\cdot\text{cm}^2$

b) $E_{kin} = E_{rot} + E_{trans} = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4}mr_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1^2}{2r_2^2}+1\right)mv^2 = 25\ mv^2 + 0{,}5mv^2$.

c) $E_{kin} = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1^2}{2r_2^2}+1\right)mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1^2}{2}+r_2^2\right)m\omega^2 \approx 4{,}08 \cdot 10^{-4}\ m\omega^2$

d) $\frac{E_{trans}}{E_{kin}} = \frac{\frac{1}{2}m\omega^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{r_1^2}{2r_2^2}+1\right)m\omega^2} = \frac{1}{\frac{r_1^2}{2r_2^2}+1} = \frac{1}{51} \approx 2\ \%$.

e) $E_{pot} = E_{rot}‘ \Leftrightarrow mgh = \frac{1}{4}mr_1^2\omega^2 \Rightarrow \omega = \frac{2}{r_1}\sqrt{g \cdot h} \approx 111{,}8\ \text{s}^{-1}$ entspricht 17,5 Umdrehungen pro Sekunde.

Aufgabe 16: Trägheitsmoment

$L = L‘ \Leftrightarrow (J_S + 2mr_1^2)\omega = (J_S + 2mr_2^2)\omega‘ \Leftrightarrow J_S = \frac{2m(r_2^2\omega' - r_1^2\omega)}{\omega - \omega'} = 2{,}86\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ mit der Hantelmasse m = 1 kg und den Winkelgeschwindigkeiten vorher $\omega = 2\pi\ \text{s}^{-1}$ sowie nachher $\omega‘ = 1{,}5\pi\ \text{s}^{-1}$.

Aufgabe 17: Rotation und schiefer Wurf: (10)

a) Mit dem Trägheitsmoment $J = \frac{2}{5}mr^2$ ist die Rotationsenergie $E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{5}mv^2$ (1)

Aus $E_{potA} = E_{transT} + E_{rotT} \Leftrightarrow m \cdot g \cdot h_A = \frac{1}{2}mv_T^2 + \frac{1}{5}mv_T^2 = \frac{7}{10}mv_T^2$ folgt $v_T = \sqrt{\frac{10 \cdot g \cdot h_A}{7}} \approx 5{,}62\ \frac{m}{s}$ (1)

b) Aus $E_{potA} = E_{transB} + E_{rotB} + E_{potB}$ folgt wie in b) $v_B = \sqrt{\frac{10 \cdot g \cdot (h_A - h_B)}{7}} \approx 4{,}51\ \frac{m}{s}$ (1)

c) Beim schiefen Wurf bleibt die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit erhalten: $v_C = v_{Bx} = v_B \cdot \cos(\alpha) \approx 2{,}59\ \frac{m}{s}$ (1)

d) Die Energiebilanz $E_{transB} + E_{rotB} + E_{potB} = E_{transC} + E_{rotC} + E_{potC}$ vereinfacht sich wegen $E_{rotB} = E_{rotC}$ zu

$E_{transB} + E_{potB} = E_{transC} + E_{potC} \Leftrightarrow y_C = y_B + \frac{v_B^2 - v_C^2}{2g} \approx 1{,}49$ m (2)

e) Wieder wegen $E_{rotB} = E_{rotD}$ gilt $E_{transB} + E_{potB} = E_{transD}$ und damit $v_D = \sqrt{v_B^2 + 2 \cdot g \cdot h_B} \approx 6{,}00\ \frac{m}{s}$ (2)

f) Die potentielle Energie bleibt gleich. Die Translationsenergie und damit die Geschwindigkeit werden aber größer, weil die Rotationsenergie auf dem Anstieg von T nach B kleiner geworden ist und dann in der Luft auf dem Weg nach D unverändert bleibt. Die zwischen T und B verlorene Rotationsenergie wird beim freien Fall in der Luft in zusätzliche Translationsenergie umgewandelt. (2)