1.7. Drehimpulserhaltung

1.7.1. Der Drehimpuls

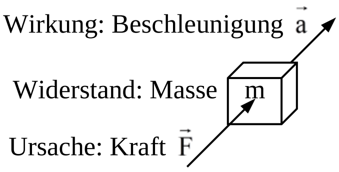
Das 2. Newtonsche Axiom beschreibt die **Translation** (geradlinige Bewegung) von Körpern im Raum:

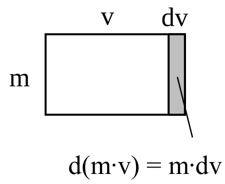
$$\boxed{\vec{F} = m\cdot\vec{a}}$$

$$\vec{F} = m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} = \frac{d(m\cdot\vec{v})}{dt},\ \text{da } m = \text{const:}$$

$$\boxed{\begin{array}{rl} \vec{F} & = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \\ \textbf{Kraft} & \textbf{= Änderungsrate des Impulses} \end{array}}$$



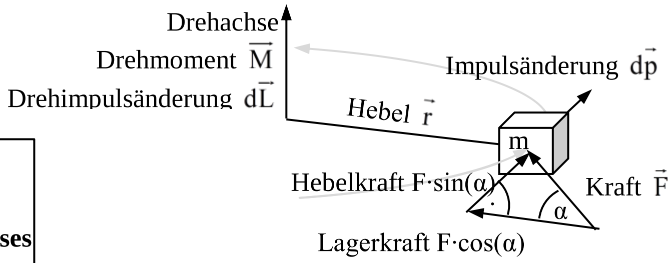


Für die **Rotation** ist es sinnvoll, diese Gleichung mit dem **Abstandsvektor** $\vec{r}$ der Masse m von der **Drehachse** vektoriell zu multiplizieren. Wegen $|\vec{r}\times\vec{F}| = r\cdot F\cdot\sin(\alpha)$ wird dabei nur die **Hebelkraft** $F\cdot\sin(\alpha)$ **senkrecht zum Hebelarm** $\vec{r}$ berücksichtigt. Die **Lagerkraft** $F\cdot\cos(\alpha)$ dagegen drückt nur auf das Drehlager und bewirkt keine Drehung:

$$\vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{M} = \frac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt},\ \text{da } \vec{r} = \text{const.}$$

$$\boxed{\begin{array}{rl} \vec{M} & = \dfrac{d\vec{L}}{dt} \\ \textbf{Drehmoment} & \textbf{= Änderungsrate des Drehimpulses} \\ \text{mit}\quad \vec{L} & = \vec{r}\times\vec{p} \\ \textbf{Drehimpuls} & \textbf{= Hebelarm · Impuls} \end{array}}$$



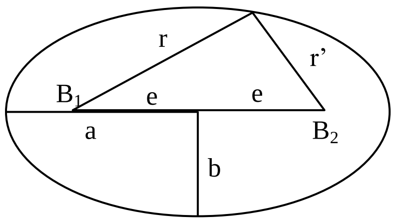
Der Drehimpuls $\vec{L}$ hat **keine eigene Einheit** und wird in der Regel in $\mathbf{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$ = **N·m·s** ausgedrückt. Seine **Richtung** weist wie das Drehmoment $\vec{M}$ senkrecht zu Hebelarm $\vec{r}$ und Impuls $\vec{p}$ in Richtung der **Drehachse**.

Übungen: Aufgaben zur Drehimpulserhaltung Nr. 1 - 3

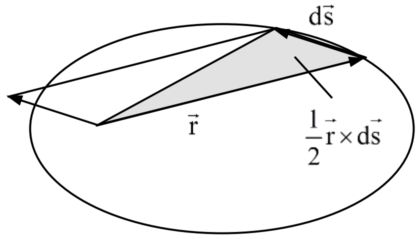
1.7.2. Die Keplerschen Gesetze

Johannes Kepler (1571 – 1630) war als Astrologe und Mathematiklehrer in Graz, Prag und Linz beschäftigt. Als Mitarbeiter und Nachfolger des habsburgischen Hofastronomen **Tycho Brahe** nutzte er dessen modernes Observatorium in der Nähe von Prag zur Vermessung der **Marsbahnen** und entwickelte auf der Basis dieser Daten rein **empirisch** (ohne theoretische Begründung) die drei folgenden Gesetze.

1. Die Planeten bewegen sich auf **Ellipsen**, in deren Brennpunkt die Sonne steht. Eine Ellipse ist die Bahn eines Punktes um zwei **Brennpunkte B_1 und B_2**, wenn die Summe seiner Abstände zu den beiden Brennpunkten immer gleich bleibt: r + r' = 2a. Wichtige Kennzeichen der Ellipse sind die **große Bahnachse** a, die **Exzentrizität** e und die **numerische Exzentrizität** $\varepsilon = \frac{e}{a}$.
   Die **kleine Bahnachse** b dagegen ist für die Planetenbahnen ohne Bedeutung, da der Zentralkörper nicht im Mittelpunkt, sondern in einem der Brennpunkte steht.
   Das 1. Keplersche Gesetz folgt aus der **Energieerhaltung**. Die Berechnung der Ellipsenbahnen erfordert allerdings die Integration der **Energiebilanz** in Zylinderkoordinaten und wird hier nicht dargestellt.



2. Der **Radiusvektor** überstreicht in **gleichen Zeiten gleiche Flächen**: $\frac{\vec{r}\times d\vec{s}}{2dt} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v} = \frac{\vec{L}}{2m}$ = const. Diese Gleichung beschreibt die **Drehimpulserhaltung** und folgt aus der Gleichung $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ des vorigen Abschnitts: Da kein äußeres Drehmoment $\vec{M}$ auf die Planeten wirkt, ist die Änderungsrate $\frac{d\vec{L}}{dt}$ des Drehimpulses gleich Null und der Drehimpuls $\vec{L}$ bleibt konstant.



3. Die **Quadrate der Umlaufzeiten** verhalten sich wie die **Kuben der großen Bahnachsen**: $\frac{a^3}{T^2}$ = const. Dies folgt für den Spezialfall der Kreisbahn einfach daraus, dass die **Zentripetalkraft** F_z gleich der **Gravitationskraft** F_G sein muss: $F_Z = F_G \Leftrightarrow m\cdot\omega^2 r = \gamma\frac{M\cdot m}{r^2} \Leftrightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \gamma\frac{M}{r^2} \Leftrightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}$ = const.

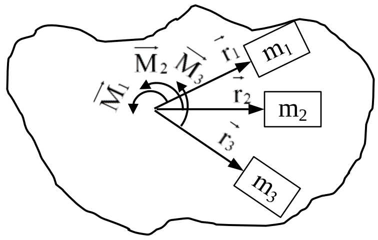
Übungen: Aufgaben zur Drehimpulserhaltung Nr. 5 - 10

1.7.3. Das Trägheitsmoment und die Rotationsenergie

Um die Bewegung eines aus vielen kleinen Massenelementen m_i zusammengesetzten Körpers zu beschreiben, muss man die **Summe Σ** der einzelnen Drehmomente $\vec{M}_i$ bzw. Drehimpulse $\vec{L}_i$ bilden:

$$\sum_i \vec{M}_i = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt}$$

$\sum_i \vec{M}_i$ ist gleich dem gesamten **äußeren Drehmoment** $\vec{M}$, welches z.B. über eine **Welle** oder als **Kräftepaar** auf den Körper wirkt. Die Summe $\sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt}$ der Änderungsraten der Drehimpulse ist gleich der Änderungsrate $\frac{d\vec{L}}{dt}$ des **gesamten Drehimpulses**.

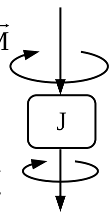


Sie lässt sich vereinfachen, indem man die bei starren Körpern für alle Massenelemente m_i gleiche **Winkelgeschwindigkeit ω** ausklammert: Mit $\vec{L}_i = \vec{r}_i\times\vec{p}_i = \vec{r}_i\times(m_i\cdot\vec{v}_i) = \vec{r}_i\times(m_i\cdot\vec{r}_i\times\vec{\omega}) = m_i\cdot r_i^2\cdot\vec{\omega}$ erhält man $\sum_i \vec{L}_i = \sum_i m_i\cdot r_i^2\cdot\vec{\omega} = J\cdot\vec{\omega}$ mit dem **Trägheitsmoment J** = $\sum_i m_i\cdot r_i^2$. Den Wegfall des Kreuzproduktes und der Vektorpfeile sollte man sich mit der Rechte-Hand-Regel klarmachen! Das Trägheitsmoment J ist ein Ausdruck für den Widerstand, den der Körper dem Drehmoment entgegensetzt. Man erhält nun für die Rotation eine Gleichung, die dem 2. Newtonschen Axiom für die Translation entspricht. Der Beschleunigung $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ wird dabei durch die **Winkelbeschleunigung** $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ ersetzt:

Ursache: Drehmoment $\vec{M}$

Widerstand: Trägheitsmoment

Wirkung: Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$



$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = J\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M} = J\cdot\vec{\alpha}}$$

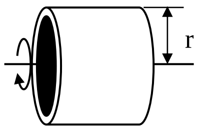
Die **Rotationsenergie** eines mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden starren Körpers ist die Summe der kinetischen Energie seiner Massenelemente m_i im Abstand r_i zur Drehachse:

$$\boxed{E_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \cdot \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2.}$$

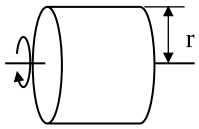
Im Vergleich zur **Translationsenergie** $E_{trans} = \frac{1}{2} mv^2$ übernimmt auch in diesem Fall das Trägheitsmoment J die Rolle der Masse m und das Winkelgeschwindigkeit ω die Stelle der Translationsgeschwindigkeit v.

Trägheitsmomente werden in **kg·m²** angegeben. Für ihre **Berechnung** benötigt man die Integration in Zylinderkoordinaten ähnlich wie beim 1. Keplerschen Gesetz. In den Formelsammlungen sind die Ergebnisse für die wichtigsten Körper und verschiedene Drehachsen aufgeführt.
Wenn die Drehachse auf der Symmetrieachse liegt, ergeben sich für einen dünnen **Hohlzylinder**, dessen gesamte Masse auf den Radius r konzentriert ist, $J = mr^2$; für einen **Vollzylinder** $J = \frac{1}{2} mr^2$ und für eine **Kugel** $J = \frac{2}{5} mr^2$. Je näher die Massenelemente an die Drehachse rücken, desto kleiner wird der wirksame Hebelarm und desto kleiner wird auch das Trägheitsmoment im Verhältnis zum Hohlzylinder.
Dreht sich ein Körper um eine Achse, die um die Strecke s vom Schwerpunkt entfernt ist, so kommt einfach das Trägheitsmoment ms^2 der entsprechenden Punktmasse in der Entfernung s von der Drehachse hinzu (**Satz von Steiner**).
Ein **Stab** der Länge l, der ähnlich wie ein Propeller um eine Achse senkrecht zur Längsachse durch die Mitte rotiert, hat das Trägheitsmoment $J = \frac{1}{12} m \cdot l^2$. Wird er aber um eines seiner Enden geschleudert, so wächst das Trägheitsmoment auf $J' = J + ms^2 = \frac{1}{12} m \cdot l^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) ml^2 = \frac{1}{3} ml^2$.

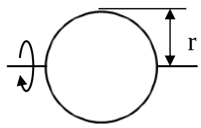
Übungen. Aufgaben zur Drehimpulserhaltung Nr. 11 - 17



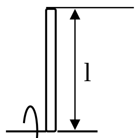
$J = mr^2$



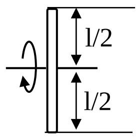
$J = \frac{1}{2} mr^2$



$J = \frac{2}{5} mr^2$



$J = \frac{1}{3} ml^2$



$J = \frac{1}{12} ml^2$