

3.5. Prüfungsaufgaben zur Wechselstromtechnik

Aufgabe 1: Impedanz (4)

Erkläre die Formel $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$ und leite sie aus der Formel $C = \frac{Q}{U}$ für die Kapazität eines Kondensators her.

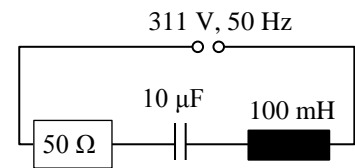
Lösung: (4)

Betrachtet man die Wechselspannung $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$ mit der **Winkelfrequenz** ω als **Realteil** der Spannungsfunktion $U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}$, so erhält man aus der **Kapazität** $C = \frac{Q}{U}$ die **Ladungsfunktion** $Q(t) = C \cdot U(t)$ und durch **Ableiten mit der Kettenregel**

die **Stromfunktion** $I(t) = C \cdot U'(t) = i\omega C \cdot U_0 \cdot e^{i\omega t}$ und den **komplexwertigen Widerstand** (Impedanz) $Z_C = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0 \cdot e^{i\omega t}}{i\omega C \cdot U_0 \cdot e^{i\omega t}} = \frac{1}{i\omega C}$, qed.

Aufgabe 2: Reihenschaltung (11)

- Berechne die Stromstärke I_{ges} und die Teilspannungen U_R , U_C und U_L sowie die Phasenverschiebung φ für die nebenstehende Reihenschaltung. (5)
- Zeichne die Teilspannungen U_R , U_C und U_L und die Gesamtspannung $U_{\text{ges}} = U_R + U_C + U_L$ in ein Zeigerdiagramm. (2)
- Erkläre und berechne die maximale Wirkleistung und die maximale Blindleistung der Schaltung. (4)



Lösungen (11):

$$a) Z_{\text{ges}} \approx (50 - 286,98i) \approx 291,2 \cdot e^{i(\omega t - 80,1^\circ)} \Omega \quad (1)$$

$$\Rightarrow I_{\text{ges}} = \frac{U}{Z_{\text{ges}}} \approx 1,07 \cdot e^{i(\omega t + 80,1^\circ)} \text{ A (Strom läuft vor)} \quad (1)$$

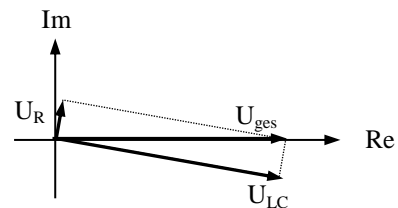
$$\Rightarrow U_R = R \cdot I_{\text{ges}} \approx 53,5 \cdot e^{i(\omega t + 80,1^\circ)} \text{ V} \quad (1)$$

$$\Rightarrow U_C = \frac{I_{\text{ges}}}{i\omega C} \approx 339,4 \cdot e^{i(\omega t + 81,1^\circ - 90^\circ)} \text{ V} \quad (1)$$

$$\Rightarrow U_L = i\omega L \cdot I_{\text{ges}} \approx 33,5 \cdot e^{i(\omega t + 80,1^\circ + 90^\circ)} \text{ V} \quad (1)$$

b) Zeigerdiagramm: siehe rechts (2)

c) Die maximale Wirkleistung $P_W = U_0 \cdot I_0 \cdot \cos(80,1^\circ) \approx 57,2 \text{ W}$ wird im ohmschen Widerstand in Wärme umgewandelt. Die maximale Blindleistung $P_B = U_0 \cdot I_0 \cdot \sin(80,1^\circ) \approx 327,8 \text{ W}$ wird zwischen Spannungsquelle und Spule bzw. Kondensator ständig hin und her übertragen. (4)



Aufgabe 3: Parallelschaltung, Effektivwerte

- Berechne die effektive Stromstärke I_{eff} und die Phasenverschiebung φ für eine Parallelschaltung des ohmschen Widerstandes $R = 5 \Omega$ mit einem Kondensator der Kapazität $C = 2 \text{ mF}$, wenn eine Wechselspannung mit $U_{\text{eff}} = 3 \text{ V}$ und $f = 50 \text{ Hz}$ angelegt wird. Begründe anhand eines Zeigerdiagramms.
- Welche Bedeutung haben Effektivwerte von Strom und Spannung?

Lösungen:

$$a) \text{Leitwert } Y = \frac{1}{R} + i\omega C = (0,2 + i0,2\pi)\Omega^{-1} \approx 0,66 \Omega^{-1} \cdot e^{i72,3^\circ} \Rightarrow I_{\text{eff}} = |Y| \cdot U_{\text{eff}} = 3 \text{ A mit } \varphi \approx 72,3^\circ \text{ (Strom läuft voraus)}$$

$$b) \bar{P} = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \overline{(\sin(\omega t))^2} = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}, \text{ falls } \varphi = 0, \text{ ansonsten Scheinleistung mit Wirkleistung } P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos(\varphi) \text{ und Blindleistung } U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \sin(\varphi)$$

Aufgabe 4: Reihenschaltung, Effektivwerte

- Berechne die effektive Stromstärke I_{eff} und die Phasenverschiebung φ für eine Reihenschaltung des ohmschen Widerstandes $R = 5 \Omega$ mit einem Kondensator der Kapazität $C = 2 \text{ mF}$, wenn eine Wechselspannung mit $U_{\text{eff}} = 10 \text{ V}$ und $f = 50 \text{ Hz}$ angelegt wird. Begründe anhand eines Zeigerdiagramms.
- Welche Bedeutung haben Effektivwerte von Strom und Spannung?

Lösungen:

a) Impedanz $Z = R - \frac{i}{\omega C} = (5 - \frac{5i}{\pi})\Omega \approx 5,24 \Omega \cdot e^{-i17,7^\circ} \Rightarrow I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{|Z|} \approx 1,91 \text{ A}$ mit $\varphi \approx 17,7^\circ$ (Strom läuft voraus)

b) $\bar{P} = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \overline{(\sin(\omega t))^2} := \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$, falls $\varphi = 0$, ansonsten Scheinleistung mit Wirkleistung $P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos(\varphi)$ und Blindleistung $U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \sin(\varphi)$.

Aufgabe 5: Spule und ohmscher Widerstand

- a) Berechne die effektive Stromstärke I_{eff} und die Phasenverschiebung φ für eine Reihenschaltung des ohmschen Widerstandes $R = 5 \Omega$ mit einer Spule der Induktivität $L = 10 \text{ mH}$, wenn eine Wechselspannung mit $U_{\text{eff}} = 10 \text{ V}$ und $f = 50 \text{ Hz}$ angelegt wird. Begründe anhand eines Zeigerdiagramms.
b) Wie werden Wechselspannungen bzw. Wechselströme erzeugt?

Lösungen:

a) Impedanz $Z = R + i\omega L = (5 + i\pi)\Omega \approx 5,91 \Omega \cdot e^{i32,1^\circ} \Rightarrow I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{|Z|} \approx 1,69 \text{ A}$ mit $\varphi \approx -32,1^\circ$ (Strom läuft nach)

- b) Induktion einer rotierenden Leiterschleife im Magnetfeld; Induktionsgesetz oder Lorentzkraft.

Aufgabe 6: Spule und ohmscher Widerstand

- a) Berechne die effektive Stromstärke I_{eff} und die Phasenverschiebung φ für eine Parallelschaltung des ohmschen Widerstandes $R = 5 \Omega$ mit einer Spule der Induktivität $L = 10 \text{ mH}$, wenn eine Wechselspannung mit $U_{\text{eff}} = 5 \text{ V}$ und $f = 50 \text{ Hz}$ angelegt wird. Begründe anhand eines Zeigerdiagramms.
b) Wie werden Wechselspannungen bzw. Wechselströme erzeugt?

Lösungen:

a) Leitwert $Y = \frac{1}{R} - \frac{i}{\omega L} = (0,2 - \frac{i}{\pi})\Omega^{-1} \approx 0,376 \Omega^{-1} \cdot e^{-i57,6^\circ} \Rightarrow I_{\text{eff}} = |Y| \cdot U_{\text{eff}} \approx 1,88 \text{ A}$ mit $\varphi \approx -57,6^\circ$ (Strom läuft nach)

- b) Induktion einer rotierenden Leiterschleife im Magnetfeld; Induktionsgesetz oder Lorentzkraft.

Aufgabe 7: Wechselstromkreis (16)

- a) Eine Spule mit der Induktivität $L = 1 \text{ mH}$ und ein ohmscher Widerstand mit $R = 0,6 \Omega$ werden in Reihe an eine Wechselspannung mit $U_{\text{eff}} = 1 \text{ V}$ und $f = 50 \text{ Hz}$ gelegt. Berechne den gesamten Scheinwiderstand Z_{RL} als komplexwertige Grösse, die Phasenverschiebung φ_{RL} und die effektive Stromstärke I_{effRL} . (3)
b) Nun wird parallel zu der Spule und dem ohmschen Widerstand aus a) ein Kondensator mit $C = 1 \text{ mF}$ angeschlossen. Berechne erneut den gesamten Scheinwiderstand Z als komplexwertige Grösse die Phasenverschiebung φ und die effektive Gesamtstromstärke I_{eff} . (3)
c) Bei welcher Frequenz f_0 verschwindet der Blindwiderstand und wie gross ist dann der Wirkwiderstand der Schaltung aus b)? (4)
d) Zeichne ein Zeigerdiagramm für die Ströme in den beiden Zweigen des Schaltkreises aus b) für die Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$. Skizziere den Schaltkreis selbst und markiere die Richtungen der Blindströme in den beiden Zweigen durch Pfeile. (3)
e) Berechne die mittlere Wirkleistung und die mittlere Blindleistung des Stromkreises und erkläre die beiden Begriffe in Worten. (3)

Vereinfachte Alternative zu c) und d)

- c) Zeige, dass der Blindwiderstand bei der Frequenz $f_0 = 127,3 \text{ Hz}$ verschwindet und berechne den Wirkwiderstand für diese Frequenz. (4)
d) Zeichne ein Zeigerdiagramm für die Ströme in den beiden Zweigen des Schaltkreises aus b) für die Frequenz $f_0 = 127,3 \text{ Hz}$. Skizziere den Schaltkreis selbst und markiere die Richtungen der Blindströme in den beiden Zweigen durch Pfeile. (4)

Lösungen

a) $Z_{\text{RL}} = R + i\omega L = (0,6 + 0,1\pi i)\Omega \approx 0,677 \cdot e^{i27,64^\circ} \Omega$ (1)

mit Phasenverschiebung $\varphi_{\text{RL}} = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 27,64^\circ$ (Strom läuft nach) (1)

und effektiver Stromstärke $I_{\text{effRL}} = \frac{U_{\text{eff}}}{|Z_{\text{RL}}|} = \frac{1 \text{ V}}{0,677 \Omega} \approx 1,48 \text{ A}$ (1)

b) $Z = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{Z_{\text{RL}}}} = \frac{1}{0,1\pi i + \frac{0,6 - 0,1\pi i}{0,6^2 + (0,1\pi)^2}} \Omega \approx 0,736 \cdot e^{i15,82^\circ} \Omega$ (1)

\Rightarrow Phasenverschiebung $\varphi \approx +15,82^\circ$ (Strom läuft nach) und Gesamtstrom $I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{|Z|} = \frac{1 \text{ V}}{0,736 \Omega} \approx 1,36 \text{ A}$ (2)

- c) Der Blindwiderstand $X = \text{Im}(Z)$ verschwindet genau dann, wenn auch der Imaginärteil $\text{Im}(Y)$ des

$$\text{Leitwertes } Y(\omega) = i\omega C + \frac{1}{R + i\omega L} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\omega C - \frac{i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \text{ verschwindet.} \quad (1)$$

$$\text{Aus } \text{Im}(Y) = 0 \Leftrightarrow C - \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} = 0 \Leftrightarrow CR^2 + \omega^2 L^2 C - L = 0 \quad (1)$$

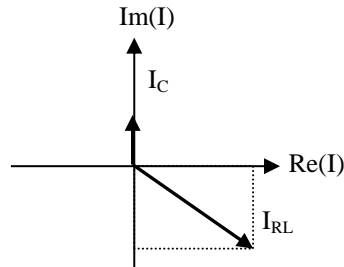
$$\text{erhält man die Lösung } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = 800 \text{ s}^{-1} \text{ bzw. die Frequenz } \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 127,3 \text{ Hz} \quad (1)$$

$$\text{mit dem Wirkwiderstand } \text{Re}(Z) = \frac{R^2 - \omega_0^2 L^2}{R} = \frac{L}{CR} = \frac{5}{3} \Omega. \quad (1)$$

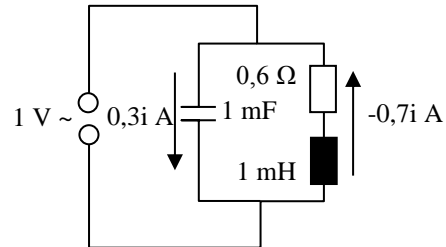
- d) Zeigerdiagramm (2):

$$\begin{aligned} I_C &= i\omega C \cdot U_0 \cdot e^{i\omega t} \\ &= 0,1 \cdot \pi \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i(100\pi t + 90^\circ)} \text{ A} \\ &\approx 0,444i \text{ A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{RL} &= \frac{U_0 \cdot e^{i\omega t}}{Z_{RL}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot e^{i\omega t}}{0,677 \cdot e^{i27,64^\circ}} \text{ A} \\ &\approx 2,09 \cdot e^{i(100\pi t - 27,64^\circ)} \text{ A} \end{aligned}$$



Schaltskizze mit Blindströmen (1):



- e) Die Wirkleistung $P_w = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos(\varphi) \approx 1,31 \text{ W}$ wird abgegeben und im ohmschen Widerstand in Wärme umgewandelt, weil Ursache U_{eff} und Wirkstrom $I_{\text{eff}} \cdot \cos(\varphi)$ die gleiche Richtung haben.
Die Blindleistung $P_B = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \sin(\varphi) \approx 0,37 \text{ W}$ wird ständig zwischen Stromquelle und Verbraucher hin und her geschoben, weil Ursache U_{eff} und Wirkstrom $I_{\text{eff}} \cdot \sin(\varphi)$ senkrecht aufeinander stehen.

Vereinfachte Alternative zu c) und d)

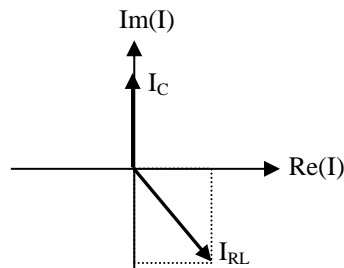
- c) Die Winkelgeschwindigkeit ist $\omega_0 = 2\pi f_0 = 800 \text{ s}^{-1}$ (1)

$$\text{Der Leitwert ist } Y(\omega_0) = i\omega_0 C + \frac{1}{R + i\omega_0 L} = \frac{R}{R^2 + \omega_0^2 L^2} + i\omega_0 C - \frac{i\omega_0 L}{R^2 + \omega_0^2 L^2} = \frac{3}{5} \Omega^{-1}. \quad (2)$$

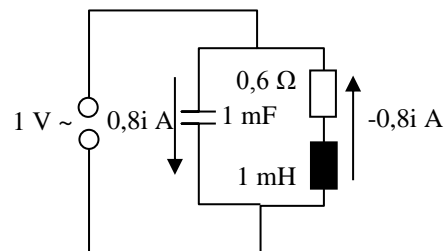
$$\text{mit dem Wirkwiderstand } \text{Re}(Z) = \frac{R^2 - \omega_0^2 L^2}{R} = \frac{L}{CR} = \frac{5}{3} \Omega. \quad (1)$$

- d) Zeigerdiagramm (2):

$$\begin{aligned} I_C &= i\omega C \cdot U \\ &= 0,8i \text{ A} \\ I_{RL} &= \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot U \\ &= \frac{0,6 - 0,8i}{0,36 + 0,64} \Omega^{-1} \cdot 1 \text{ V} \\ &= (0,6 - 0,8i) \text{ A} \end{aligned}$$



Schaltskizze mit Blindströmen (2):



Aufgabe 8: Parallel- und Reihenschaltung (15)

- Ein Kondensator mit $C = 1 \text{ mF}$ und ein ohmscher Widerstand mit $R = 5 \Omega$ werden in Reihe an eine Wechselspannung mit $U_{\text{eff}} = 10 \text{ V}$ und $f = 50 \text{ Hz}$ gelegt. Berechne den gesamten Scheinwiderstand Z als komplexwertige Grösse, die Phasenverschiebung φ und die effektive Stromstärke I_{eff} . (3)
- Nun wird parallel zu dem Kondensator und dem ohmschen Widerstand aus a) eine Spule mit der Induktivität $L = 50 \text{ mH}$ angeschlossen. Berechne erneut den gesamten Scheinwiderstand Z als komplexwertige Grösse und die Phasenverschiebung φ . (3)
- Bei welcher Frequenz f_0 verschwindet der Blindwiderstand und wie gross ist dann der Wirkwiderstand der Schaltung aus b)? (4)
- Zeichne ein Zeigerdiagramm für die Ströme in den beiden Zweigen des Schaltkreises aus b) für die Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$. Skizziere den Schaltkreis selbst und markiere die Richtungen der Blindströme in den beiden Zweigen durch Pfeile. (4)
- Nun wird die Stromquelle abgeklemmt. Warum fliesst weiterhin Strom? (1)

Aufgabe 8: Parallel- und Reihenschaltung (15)

a) $Z = R + \frac{1}{i\omega C} \approx (5 - 3,18i) \Omega$ (1)

mit Phasenverschiebung $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-3,18}{5}\right) \approx -32,48^\circ$ (Strom läuft voraus) (1)

und effektiver Stromstärke $I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{|Z|} = \frac{10 \text{ V}}{5,93 \Omega} \approx 1,69 \text{ A}$ (1)

b) $Z_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{i\omega L} + \frac{1}{Z}} = \frac{1}{-0,064i + \frac{5+3,18i}{5^2+3,18^2}} \Omega \approx \frac{35,13}{5-0,94i} \Omega \approx 1,357 \cdot (5 + 0,94i) \Omega = (6,786 + 1,281i) \Omega$. (2)

Die Phasenverschiebung ist $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}Z}{\text{Re}Z}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1,281}{6,786}\right) \approx +10,69^\circ$ (Strom läuft nach) (1)

c) Der Blindwiderstand $X = \text{Im}(Z_{\text{ges}})$ verschwindet genau dann, wenn auch der Imaginärteil $\text{Im}(Y_{\text{ges}})$ des Leitwertes $Y_{\text{ges}}(\omega) =$

$\frac{1}{i\omega L} + \frac{1}{R + 1/i\omega C} = \frac{R}{R^2 + 1/\omega^2 C^2} - \frac{i}{\omega L} + \frac{i/\omega C}{R^2 + 1/\omega^2 C^2}$ verschwindet. (1)

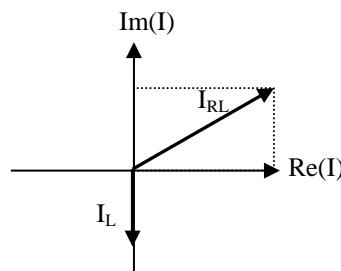
Aus $\text{Im}(Y_{\text{ges}}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1/\omega C}{R^2 + 1/\omega^2 C^2} - \frac{1}{\omega L} = 0 \Leftrightarrow \frac{L}{C} - R^2 - \frac{1}{\omega^2 C^2} = 0 \Leftrightarrow LC - R^2 C^2 = \frac{1}{\omega^2}$ (1)

erhält man die Lösung $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC - R^2 C^2}} = 200 \text{ s}^{-1}$ bzw. die Frequenz $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 31,8 \text{ Hz}$ (1)

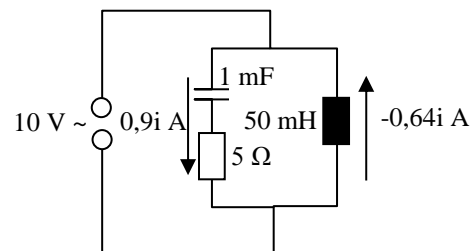
mit dem Wirkwiderstand $\text{Re}(Z_{\text{ges}}) = \frac{1}{Y_{\text{ges}}(\omega_0)} = \frac{R^2 + 1/\omega^2 C^2}{R} = \frac{L}{CR} = 10 \Omega$. (1)

d) Zeigerdiagramm (2):

$I_L = U/(i\omega L) \approx -0,64i \text{ A}$
 $I_{RC} = \frac{U}{R + \frac{1}{i\omega C}} = 10 \text{ V} \cdot \frac{5+3,18i}{5^2+3,18^2} \Omega^{-1} \approx (1,4 + 0,9i) \text{ A}$



Schaltskizze mit Blindströmen (2):



e) Bei Entfernung der äußeren Spannungsquelle entlädt sich der Kondensator über die Spule. Ihre Selbstinduktion widersetzt sich der Abnahme des Entladestroms und führt dazu, dass der Entladestrom auch bei vollständiger Entladung in die gleiche Richtung weiter fließt. Der Entladestrom wird dadurch zu einem Ladestrom und lädt den Kondensator entgegengesetzt auf. Durch die zunehmende Ladenspannung sinkt der Ladestrom langsam auf Null ab und wechselt schließlich die Richtung. Damit ist die erste Halbschwingung beendet. Er wird zu einem Entladestrom und der Vorgang wiederholt sich in entgegengesetzter Richtung. (1)

Aufgabe 9: Parallel- und Reihenschaltung (15)

- Eine Spule mit der Induktivität $L = 4 \text{ mH}$ und ein ohmscher Widerstand mit $R = 5 \Omega$ werden in Reihe an eine Wechselspannung mit $U_{\text{eff}} = 20 \text{ V}$ und $f = 200 \text{ Hz}$ gelegt. Berechne den gesamten Scheinwiderstand Z als komplexwertige Grösse, die Phasenverschiebung φ und die effektive Stromstärke I_{eff} . (3)
- Nun wird parallel zu der Spule und dem ohmschen Widerstand aus a) ein Kondensator mit $C = 0,1 \text{ mF}$ angeschlossen. Berechne erneut den gesamten Scheinwiderstand Z als komplexwertige Grösse und die Phasenverschiebung φ . (3)
- Bei welcher Frequenz f_0 verschwindet der Blindwiderstand und wie gross ist dann der Wirkwiderstand der Schaltung aus b)? (4)
- Zeichne ein Zeigerdiagramm für die Ströme in den beiden Zweigen des Schaltkreises aus b) für die Frequenz $f = 200 \text{ Hz}$. Skizziere den Schaltkreis selbst und markiere die Richtungen der Blindströme in den beiden Zweigen durch Pfeile. (4)
- Wie verhalten sich die Blindströme in den beiden Zweigen bei der Frequenz f_0 aus Teil c)?
- Nun wird die Stromquelle abgeklemmt. Warum fließt weiterhin Strom? (1)
- Handelt es sich nun um eine Parallel- oder eine Reihenschaltung? (1)

Aufgabe 9: Parallel- und Reihenschaltung (15)

a) $Z = R + i\omega L = (5 + 1,6\pi i) \Omega \approx (5 + 5i) \Omega$ (1)

mit Phasenverschiebung $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \approx \tan^{-1}\left(\frac{5}{5}\right) \approx 45^\circ$ (Strom läuft nach) (1)

und effektiver Stromstärke $I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{|Z|} \approx \frac{20 \text{ V}}{5\sqrt{2} \Omega} = 2,8 \text{ A}$ (1)

b) $Z_{\text{ges}} = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{Z}} = \frac{1}{0,127i + \frac{5-5i}{5^2+5^2}} \Omega \approx \frac{50}{5+1,3i} \Omega \approx 1,88 \cdot (5 - 1,3i) \Omega = (9,38 - 2,41i) \Omega$. (2)

Die Phasenverschiebung ist $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}Z}{\text{Re}Z}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-2,41}{9,38}\right) \approx -14,41^\circ$. (Strom läuft vor) (1)

c) Der Blindwiderstand $X = \text{Im}(Z)$ verschwindet genau dann, wenn auch der Imaginärteil $\text{Im}(Y)$ des Leitwertes $Y(\omega) = i\omega C + \frac{1}{R + i\omega L} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\omega C - \frac{i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$ verschwindet. (1)

Aus $\text{Im}(Y) = 0 \Leftrightarrow C - \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} = 0 \Leftrightarrow CR^2 + \omega^2 L^2 C - L = 0$ (1)

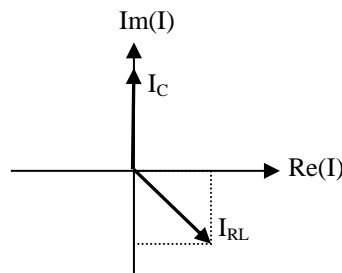
erhält man die Lösung $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = 968,2 \text{ s}^{-1}$ bzw. die Frequenz $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 154,1 \text{ Hz}$ (1)

mit dem Wirkwiderstand $\text{Re}(Z) = \frac{R^2 - \omega_0^2 L^2}{R} = \frac{L}{CR} = 8 \Omega$. (1)

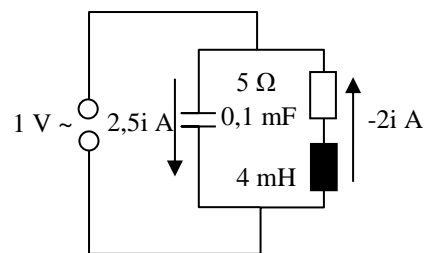
d) Zeigerdiagramm (2):

$$I_C = i\omega C \cdot U \approx 2,5i \text{ A}$$

$$I_{RL} = \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot U = \frac{5 - 5i}{5^2 + 5^2} \Omega^{-1} \cdot 20 \text{ V} = (2 - 2i) \text{ A}$$



Schaltskizze mit Blindströmen (2):



e) Die Blindströme in den beiden Zweigen werden entgegengesetzt gleich groß. (1)

Die Rechnung (nicht verlangt) ergibt $I_C = i\omega C \cdot U = 1,9i \text{ A}$ und $I_{RL} = \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot U = \frac{5 - 3,87i}{25 + 15} \Omega^{-1} \cdot 20 \text{ V} = (24 - 1,9i) \text{ A}$.

f) Bei Entfernung der äußeren Spannungsquelle entlädt sich der Kondensator über die Spule. Ihre Selbstinduktion widersetzt sich der Abnahme des Entladestroms und führt dazu, dass der Entladestrom auch bei vollständiger Entladung in die gleiche Richtung weiter fließt. Der Entladestrom wird dadurch zu einem Ladestrom und lädt den Kondensator entgegengesetzt auf. Durch die zunehmende Ladenspannung sinkt der Ladestrom langsam auf Null ab und wechselt schließlich die Richtung. Damit ist die erste Halbschwingung beendet. Er wird zu einem Entladestrom und der Vorgang wiederholt sich in entgegengesetzter Richtung. (1)

g) Es handelt sich dann um eine Reihenschaltung. (1)

Aufgabe 10: Parallel- und Reihenschaltung (8)

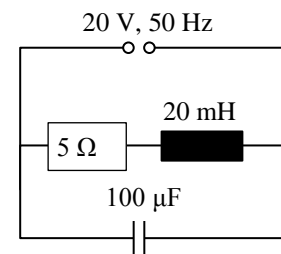
a) Bestimme die komplexwertige Impedanz der rechts abgebildeten Schaltung. (2)

b) Bestimme den Scheitelwert I_0 und die Phasenverschiebung φ_0 des Stromes $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$, wenn eine Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ mit Scheitelwert $U_0 = 20 \text{ V}$ und Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$ angelegt wird. (2)

c) Stelle die beiden Zweigströme in einem Zeigerdiagramm dar. (2)

d) Berechne die Wirkleistung der Schaltung. (1)

e) Beschreibe den Begriff der Wirkleistung in Worten. (1)



Lösungen

a) Der obere Zweig hat die Impedanz $Z_{RL} = R + i\omega L = (5 + 2\pi i) \Omega \approx 8,03 \Omega \cdot \text{cis}(51,49^\circ)$ (1)

Die Gesamtimpedanz ist $Z_{\text{ges}} = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{Z_{RL}}} = \frac{1}{\frac{i\pi}{100} + \frac{1}{5 + 2\pi i}} \Omega \approx (7,47 + 6,37i) \Omega \approx 9,82 \Omega \cdot \text{cis}(40,41^\circ)$ (1)

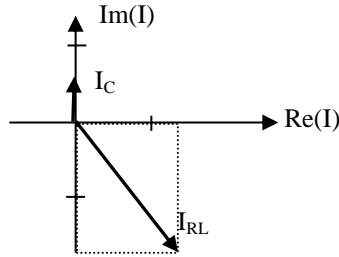
b) Die Stromstärke ist $I(t) = \frac{U(t)}{Z_{\text{ges}}} = \frac{20 \text{ V} \cdot \text{cis}(0^\circ)}{9,82 \Omega \cdot \text{cis}(41,41^\circ)} \approx 2,04 \text{ A} \cdot \text{cis}(-40,41^\circ)$. (1)

Der Scheitelwert ist also $I_0 \approx 2,04 \text{ A}$ und die Phasenverschiebung ist $\varphi_0 \approx -40,41^\circ$ (Strom läuft nach) (1)

c) Zeigerdiagramm mit Zweigströmen (2)

$$I_C = i\omega C \cdot U \approx 0,63i \text{ A}$$

$$I_{RL} = \frac{U(t)}{Z_{RL}} = 2,21 \text{ A} \cdot \text{cis}(-51,49^\circ) = (1,55 - 1,95i) \text{ A}$$



d) Wirkleistung $P_{\text{eff}} = \frac{1}{2} U_0 \cdot I_0 \cdot \cos(\varphi_0) \approx 15,6 \text{ W}$ (1)

e) Die Wirkleistung ist das Produkt aus Spannung $U(t)$ und dem gleichphasigen Anteil $I(t) \cdot \cos(\varphi_0)$ des Stromes. Sie beschreibt die Leistung, die im ohmschen Widerstand in Wärme umgewandelt wird. (1)

Aufgabe 11: Berechnung von I und L aus gegebener Phasenverschiebung (4)

Eine Spule mit dem ohmschen Widerstand $R = 30 \Omega$ ist an eine Wechselspannungsquelle mit der Effektivspannung $U_{\text{eff}} = 220 \text{ V}$ und der Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$ angeschlossen. Berechne die Induktivität L der Spule und die effektive Stromstärke I_{eff} , wenn die Phasenverschiebung $\varphi = 53^\circ$ beträgt.

Lösung: (4)

Aus der Phasenverschiebung $\tan(\varphi) = \frac{\omega L}{R}$ erhält man die Induktivität $L = \frac{R \cdot \tan(\varphi)}{\omega} \approx 0,127 \text{ H}$. (2)

Aus der Impedanz $\frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = |Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ folgt $I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \approx 6,24 \text{ A}$ (2)

Aufgabe 12: Bestimmung der Induktivität einer Spule (10)

a) Um den ohmschen Widerstand einer Spule zu bestimmen, legt man zunächst eine Gleichspannung von 3 V an und misst eine Stromstärke von $2,5 \text{ A}$. Wie gross ist R ? (1)

b) Für die Bestimmung der Induktivität schliesst man die Spule kurz und misst, wie schnell die Stromstärke absinkt. Zeige mit Hilfe einer Differentialgleichung, dass der Strom mit dem Anfangswert I_0 durch eine Spule mit dem ohmschen Widerstand

R und der Induktivität L nach der Gleichung $I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$ abklingt, wenn t die Zeit ist, die seit dem Ausschalten der Spannungsquelle vergangen ist. (3)

c) Bestimme die Induktivität L , wenn die Stromstärke nach $1,3 \text{ Sekunden}$ auf 25 mA abgefallen ist. (2)

d) Da der Strom bei dieser Spule ziemlich schnell abnimmt, ist der in c) bestimmte Wert nicht sehr exakt. Um einen genaueren Wert für die Induktivität L zu ermitteln, wird eine Kondensator mit regelbarer Kapazität in Reihe mit der Spule an eine Wechselspannung mit der Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$ gelegt. Die Stromstärke ist nun maximal, wenn man den Kondensator auf $C = 30 \mu\text{F}$ einstellt. Zeige mit Hilfe der komplexwertigen Impedanz Z dieser Schaltung, dass ihr Betrag $|Z|$ unter der

Bedingung $\frac{1}{\omega C} = \omega L$ minimal wird und berechne L mit Hilfe dieser Bedingung. (4)

Lösung (10)

a) $R = \frac{U}{I} = 1,2 \Omega$ (1)

b) Addition der Spannung bei der Reihenschaltung:

$$U_R + U_L = 0 \Leftrightarrow R \cdot I + L \cdot \dot{I} = 0 \Leftrightarrow \dot{I} = -\frac{R}{L} \cdot I \Leftrightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \cdot dt \Rightarrow \ln\left(\frac{I(t)}{I_0}\right) = -\frac{R}{L} (t-0) \Leftrightarrow I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$
 (3)

c) $0,025 \text{ A} = 2,5 \text{ A} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot 1,3 \text{ s}} \Rightarrow \ln(100) = \frac{R}{L} \cdot 1,3 \text{ s} \Rightarrow L = \frac{1,2 \Omega \cdot 1,3 \text{ s}}{\ln(100)} \approx 0,339 \text{ H}$ (2)

d) $Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$ (1)

$$\Rightarrow |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$
 (1)

$$\Rightarrow |Z| = R, \text{ wenn } \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC}$$
 (1)

$$\Rightarrow L = \frac{1}{\omega^2 \cdot C} \approx 0,338 \text{ H.}$$
 (1)