4.1. Aufgaben zu Schwingungen

Aufgabe 1: ungedämpfte Federschwingung
Berechne die Federkonstante D und die Schwingungsdauer T für eines Feder, die durch einen angehängten Körper der Masse m = 20 g um Δs = 10 cm verlängert wird. Rechne mit g = 10 m/s^2

Aufgabe 2: ungedämpfte Federschwingung
Steigert man die an eine Feder gehängte Masse von 300 g auf 500 g, so verlängert sie sich um 8 cm. Berechne die Schwingungsdauer für einen 1 kg schweren Körper.

Aufgabe 3: ungedämpfte Federschwingung

Welche Masse muss an eine Feder mit D = 10 N·m^{-1} gehängt werden, damit sie mit der Periodendauer T = $\frac{\pi}{2}$ schwingt?

Aufgabe 4: ungedämpfte Federschwingung

Ein 300 g schwerer Körper schwingt an einer Schraubenfeder mit der Amplitude x_0 = 12 cm und der Periodendauer T = $\frac{\pi}{2}$ s.

a) Berechne die Federkonstante D der Feder.
b) Wie groß ist die Geschwindigkeit v beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage und bei der größten Auslenkung?
c) Wie groß ist die Beschleunigung a beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage und bei der größten Auslenkung?

Aufgabe 5: ungedämpfte Federschwingung
Ein 50 g schwerer Körper wird an einer Schraubenfeder mit D = 6 N·m^{-1} um 10 cm aus seiner Gleichgewichtslage nach unten gezogen und dann losgelassen.
a) Berechne die für die Auslenkung notwendige Kraft und die Schwingungsdauer.
b) Wie groß ist die Geschwindigkeit v beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage und bei der größten Auslenkung?
c) Wie groß ist die Beschleunigung a beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage und bei der größten Auslenkung?

Aufgabe 6: gedämpfte Federschwingung
Ein 100g schwerer Körper an einer Feder mit D = 10 N·m^{-1} und Reibungsfaktor k = 0,02 kg·s^{-1} wird um x_0 = 10 cm ausgelenkt und losgelassen.
a) Berechne die Periodendauer T und die Halbwertszeit $t_{1/2}$ der Schwingung.
b) Nach wie vielen Schwingungen hat sich die Auslenkung halbiert?
c) Wie groß ist die Geschwindigkeit v beim ersten Durchgang durch die Gleichgewichtslage?

Aufgabe 7: gedämpfte Federschwingung
Ein 200 g schwerer Körper schwingt an einer Feder mit der Periodendauer T = 1 s und der Halbwertszeit $t_{1/2}$ = 5 s. Berechne die Federkonstante D und den Reibungsfaktor k der Feder.

Aufgabe 8: ungedämpftes Pendel
Bestimme die Schwingungsdauer T und die Anzahl der Schwingungen pro Minute, die eine kleine schwere Kugel an einem 5 m langen Faden im Schwerefeld der Erde mit g ≈ 10 m/s^2 ausführt.

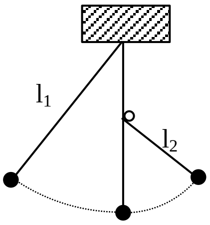
Aufgabe 9: ungedämpftes Pendel
An einem Ort herrschte die Gravitationsfeldstärke g = 9,82 m·s^{-2}.
a) Welche Länge l_1 muss ein Pendel haben, das an diesem Ort in zwei Sekunden eines Schwingung ausführt?
b) Welche Länge l_2 muss es haben, wenn die Schwingungsdauer T_2 = 1 s betragen soll?

Aufgabe 10: ungedämpftes Pendel
Zur Bestimmung der Gravitationsfeldstärke bzw. der Masse des Mondes wird die Schwingungsdauer T_1 = 3 s eins Fadenpendels bestimmt. Nach Verlängerung um Δl = 1,11 m verdoppelt sich die Schwingungsdauer auf T_2 = 6 s. Wie lang waren die beiden Pendel und wie groß ist die Gravitationsfeldstärke auf dem Mond?

Aufgabe 11: ungedämpftes Pendel
Je weiter man eine Pendel aus seiner Ruhelage auslenkt, desto stärker weicht die tatsächliche Periodendauer von dem Wert T = $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ab.

a) Wie groß ist die Komponente F_{Rx} der Rückstellkraft $F_R = F_G\cdot\sin(\alpha) = m\cdot g\cdot\frac{x}{l}$, die genau in x-Richtung wirkt?
b) Bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{\alpha\to 90°} F_{Rx}$, wenn das Pendel bis zur waagrechten ausgelenkt wird.
c) Wird die tatsächliche Periodendauer bei großen Auslenkungen größer oder kleiner als der berechnete Wert?

Aufgabe 12: ungedämpftes Pendel

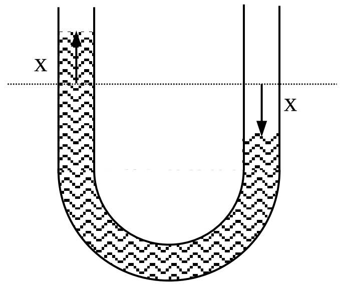


Beim Galileischen Rückhaltependel wird eine Stativstange so angebrachte, dass das Pendel auf der linken Seite l_1 = 250 cm, auf der rechten Seite aber nur noch l_2 = 160 cm zu Verfügung hat.

a) Das Pendel wird so ausgelenkt, dass es links die Höhe h über der Ruhelage erreicht. Welche Höhe erreicht es dann auf der rechten Seite? Begründe.

b) Berechne die mittlere Periodendauer des Pendels für g = 10 $m.s^{-2}$.

Aufgabe 13: ungedämpftes Pendel



In ein U-Rohr mit dem konstanten Querschnitt A = 6,5 cm^2 werden V = 400 cm^3 Wasser gefüllt und durch Schwenken in eine Schwingung versetzt. Zeige, dass der Flüssigkeitsstand der Wassersäule sich durch $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t)$ beschreiben lässt und bestimme die Periodendauer T.

Aufgabe 14: Schwingkreis

Welche Eigenfrequenz f_0 hat ein Schwingkreis aus einem Kondensator der Kapazität C = 200 pF und einer Spule mit der Induktivität L = 10 µH?

Aufgabe 15: Schwingkreis

Ein Antennenschwingkreis besteht aus einer Spule mit L = 800 µH und einem stufenlos regelbaren „Trimmerkondensator“, der in Verbindung mit der Antenne Kapazitäten von 2 bis 50 pF erreicht. Welcher Frequenzbereich kann mit diesem Sender abgedeckt werden?

Aufgabe 16: Schwingkreis

Ein ungedämpfter Schwingkreis besteht aus einer Spule mit der Induktivität L und einem Kondensator mit der Kapazität C sowie einem zweiten „Trimmerkondensator“, der parallel zum ersten Kondensator geschaltete ist und dessen Kapazität zwischen 10 pF und 100 pF stufenlos eingestellt werden kann. Welche Werte müssen L und C haben, damit man mit diesem Schwingkreis Frequenzen zwischen f_1 = 300 kHz und f_2 = 100 kHz erzeugen kann?

4.1. Lösungen zu den Aufgaben zu Schwingungen

Aufgabe 1: ungedämpfte Federschwingung

$D = \frac{\Delta F}{\Delta s} = \frac{mg}{\Delta s} = 2\ \frac{N}{m}$ und $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{\pi}{5}\text{ s} \approx 0{,}63\text{ s}$

Aufgabe 2: ungedämpfte Federschwingung

$D = \frac{\Delta F}{\Delta s} = 25\ \frac{N}{m}$ und $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{2\pi}{5}\text{ s} \approx 1{,}26\text{ s}$

Aufgabe 3: ungedämpfte Federschwingung

$m = \frac{D\cdot T^2}{4\pi^2} = \frac{5}{8} = 0{,}625\text{ s}$

Aufgabe 4: ungedämpfte Federschwingung

a) $D = \frac{4\pi^2\cdot m}{T^2} = 4{,}8\ \frac{N}{m}$

b) $v(t) = \dot{x}(t) = -x_0\cdot\omega\cdot\sin(\omega t) = -x_0\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\sin(\omega t) \Rightarrow v(0) = 0$ und $v\left(\frac{T}{4}\right) = -x_0\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot = -x_0\cdot\sqrt{\frac{D}{m}} = -0{,}48\ \frac{m}{s}$

oder mit Energieerhaltung: $E_{kin}\left(\frac{T}{4}\right) = E_{pot}(0) \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Dx_0^2 \Rightarrow v = \pm x_0\cdot\sqrt{\frac{D}{m}}$.

c) $a(t) = \dot{v}(t) = -x_0\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega t) = -x_0\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot\cos(\omega t) \Rightarrow a(0) = -x_0\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot = -1{,}92\ \frac{m}{s^2}$ und $a\left(\frac{T}{4}\right) = 0$

Aufgabe 5: ungedämpfte Federschwingung

a) $\Delta F = D\cdot\Delta s = 0{,}6\text{ N}$ und $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \approx 0{,}57\text{ s}$

b) $v(0) = 0$ und $v\left(\frac{T}{4}\right) = -x_0\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot = -x_0\cdot\sqrt{\frac{D}{m}} = -1{,}10\ \frac{m}{s}$ oder mit Energieerhaltung.

c) $a(0) = -x_0\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot = -x_0\cdot\frac{D}{m}\cdot = -12\ \frac{m}{s^2}$ und $a\left(\frac{T}{4}\right) = 0$

Aufgabe 6: gedämpfte Federschwingung

a) **Dämpfungsfaktor** $\delta = -\frac{k}{2m} = 0{,}1\text{ s}^{-1} \Rightarrow$ **Halbwertszeit** $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\delta} \approx 6{,}9\text{ s}$

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} \approx 10\text{ s}^{-1} \Rightarrow$ **Periodendauer** $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 0{,}63\text{ s}$.

b) Die Auslenkung halbiert sich nach $\frac{t_{1/2}}{T} \approx 11$ Schwingungen.

c) Mit der Ketten- und Produktregel erhält man $v(t) = \dot{x}(t) = (x_0\cdot e^{\delta t}\cdot\cos(\omega t))' = x_0\cdot e^{\delta t}\cdot[\delta\cdot\cos(\omega t) - \omega\cdot\sin(\omega t)]$

$\Rightarrow v\left(\frac{T}{4}\right) = -x_0\cdot e^{\frac{\delta\cdot T}{4}}\cdot\omega \approx -x_0\cdot\omega \approx -1\ \frac{m}{s}$.

Aufgabe 7: gedämpfte Federschwingung

Dämpfungsfaktor $\delta = \frac{\ln(2)}{-t_{1/2}} \approx -0{,}138\text{ s}^{-1} \Rightarrow$ **Reibungsfaktor** $k = -2\cdot m\cdot k \approx 0{,}055\text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$.

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\text{ s}^{-1}$. Aus $\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{D}{m} - \delta^2}$ folgt $D = m(\omega^2 + \delta^2) \approx 7{,}9\ \frac{N}{m}$.

Aufgabe 8: ungedämpftes Pendel

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 4{,}44\text{ s} \Rightarrow 13{,}5$ Schwingungen pro Minute.

Aufgabe 9: ungedämpftes Pendel

a) $l_1 = \frac{T_1^2 \cdot g}{4\pi^2} \approx 0{,}995$ m

b) $l_2 = \frac{T_2^2 \cdot g}{4\pi^2} \approx 0{,}249$ m

Aufgabe 10: ungedämpftes Pendel

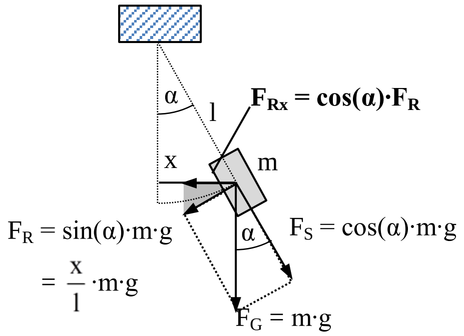
Aus $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$ und $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$ erhält man durch Division $\frac{l_2}{l_1} = \frac{T_2^2}{T_1^2} = 4$. Das erste Pendel war also $l_1 = \frac{1}{3}\Delta l = 0{,}37$ m lang und das zweite $l_2 = \frac{4}{3}\Delta l = 1{,}48$ m. Die Gravitationsfeldstärke ist $g = \frac{4\pi^2 \cdot l_2}{T_2^2} \approx 1{,}62\ \frac{m}{s^2}$.

Aufgabe 11: ungedämpftes Pendel

a) $F_{Rx} = \cos(\alpha)\cdot F_R = \cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)\cdot mg$ (siehe Zeichnung)

b) $\lim\limits_{\alpha\to 90°} F_{Rx} = 0$, da $\lim\limits_{\alpha\to 90°} \cos(\alpha) = \cos(90°) = 0$

c) Da die Rückstellkraft mit zunehmendem α verschwindet, verharrt das Pendel in Wirklichkeit länger bei großen Auslenkungen und die Periodendauer ist länger



Aufgabe 12: ungedämpftes Pendel

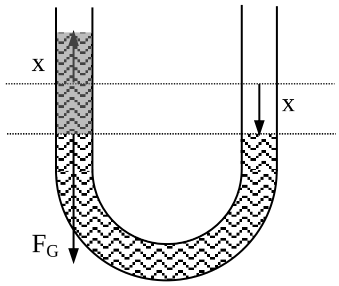
a) Aufgrund der Erhaltung der potentiellen Energie $E_{pot} = m\cdot g\cdot h$ erreicht das Pendel rechts die gleiche Höhe wie links.

b) Die Periodendauern sind links $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$ und rechts $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$

Rechts kommt das Pendel schneller wieder zurück, weil es einen kürzeren Weg mit der gleichen mittleren Geschwindigkeit zurücklegt. Die mittlere Periodendauer ist also $\frac{T_1 + T_2}{2} \approx 0{,}9\ s^{-1}$.

Aufgabe 13: ungedämpftes Pendel

Bei einer Auslenkung des Flüssigkeitsspiegels um x aus der Ruhelage wirkt als Rückstellkraft die Gravitationskraft $F_G(x) = \Delta m\cdot g$ des überstehenden Teils mit der Masse $\Delta m = \rho\cdot\Delta V = \rho\cdot A\cdot 2x$ und beschleunigt die Gesamtmasse $m = \rho\cdot V$ in die Gegenrichtung: Mit dem 2. Newtonschen Axiom erhält man $F_G(x) = m\cdot a \Leftrightarrow -\rho\cdot A\cdot 2x(t)\cdot g = \rho\cdot V\cdot \ddot{x}(t) \Leftrightarrow -2A\cdot g\cdot x(t) = V\cdot \ddot{x}(t)$. Diese Gleichung hat die gleiche Form wie die Differentialgleichung $-D\cdot x(t) = m\cdot \ddot{x}(t)$ der Federschwingung. Man erhält also die entsprechende Lösung $x(t) = x_0\cdot\cos(\omega t)$ mit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{2A\cdot g}{V}}$ bzw. der Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{2V}{A\cdot g}} \approx 3{,}48$ s.



Aufgabe 14: Schwingkreis

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 3{,}56 \text{ MHz}$$

Aufgabe 15: Schwingkreis

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC_2}} = f_2 = 798 \text{ KHz} \le f \le 3{,}98 \text{ MHz} = f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}}$$

Aufgabe 16: Schwingkreis

Die Kapazitäten der beiden parallel geschalteten Kondensatoren addieren sich:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{L(C+C_1)}} = f_1 \text{ und } \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C+C_2)}} = f_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4\pi^2\cdot f_1^2\cdot(C+C_1)} = L = \frac{1}{4\pi^2\cdot f_2^2\cdot(C+C_2)}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{f_1^2\cdot C_1 - f_2^2\cdot C_2}{f_1^2 - f_2^2} = 1{,}25 \text{ pF und } L = 25 \text{ mH}$$